Sapienza - Università di Roma
Facoltà di Ingegneria - A.A. 2015-2016
Soluzioni appello Metodi Matematici per l'Ingegneria del 23 ottobre 2015

Esercizio 1.
(i) Studiare la convergenza assoluta e totale della seguente serie di funzioni in campo complesso

$$\sum_{n=-2}^{+\infty} n(n+3)\frac{1}{(z+4)^n}, \quad z \in C$$

(ii) Dire in quale regione del piano complesso la sua somma $f(z)$ è analitica.

Soluzione:

(i) La parte regolare della serie

$$\sum_{n=-2}^{0} n(n+3)\frac{1}{(z+4)^n}$$

converge per ogni $z \in \mathbb{C}$.
Per quanto riguarda la parte singolare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+3)\frac{1}{(z+4)^n},$$

si ha convergenza puntuale per $|z+4| > 1$. Infatti, posto $\frac{1}{z+4} = w$, la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+3)w^n,$$

ha raggio di convergenza uguale ad 1.
La convergenza totale si ha per $|z+4| \geq a > 1$, con a arbitrario.

(ii) La somma è analitica nella regione di convergenza della serie di Laurent.

Esercizio 2. Usando la trasformata di Laplace, determinare α e β reali tali che la soluzione del problema

$$y(t) \star t^2 = \alpha t^3 + \beta t^4$$

soddisfi $y(0) = -2$ e $y'(0) = 5$.

Soluzione:

Posto $Y(s) = \mathcal{L}[y](s)$, ricordando che la trasformata di un prodotto di convoluzione tra due funzioni è il prodotto delle trasformate delle due funzioni e usando la proprietà di linearità della trasformata si trova che

$$\mathcal{L}[y(t)]\mathcal{L}[t^2] = \alpha\mathcal{L}[t^3] + \beta\mathcal{L}[t^4],$$

da cui

$$Y(s) = \frac{3\alpha}{s} + \frac{12\beta}{s^2}.$$

Antitrasformando si ha

$$y(t) = 3\alpha + 12\beta t.$$

Pertanto imponendo le condizioni $y(0) = -2$ e $y'(0) = 5$, si trova che

$$\alpha = -\frac{2}{3}, \quad \beta = \frac{5}{12}.$$

Esercizio 3. Si calcoli il seguente integrale

$$\int_\gamma \frac{z^2}{(z^2+1)(|z|-1)}dz,$$

dove $\gamma(t)$ è la curva data da $\gamma(t) = 3e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Soluzione:

La funzione integranda non è olomorfa nel suo dominio. Tuttavia, osservando che su γ si ha che $|z| = 3$, l'integrale può essere riscritto nel seguente modo:

$$\int_\gamma \frac{z^2}{(z^2+1)(|z|-1)}dz = \int_\gamma \frac{z^2}{2(z^2+1)}dz.$$

A questo punto, applicando il teorema dei residui si trova che

$$\int_\gamma \frac{z^2}{2(z^2+1)}dz = 2\pi i[res(f(z), i) + res(f(z), -i)],$$

con i e $-i$ singolarità di $f(z)$ (poli del primo ordine), entrambe contenute in γ. Essendo

$$res(f(z), i) = \frac{i}{4}, \quad res(f(z), -i) = -\frac{i}{4}$$

si ha che

$$\int_\gamma \frac{z^2}{2(z^2+1)}dz = 0.$$

Esercizio 4 (D1)**.**
(i) Enunciare i teoremi sulla convergenza puntuale e totale della serie di Fourier spiegando le ipotesi.
(ii) Data la funzione $f(x)$ periodica di periodo 4π e definita in $[0, 4\pi[$ da

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{x}{2}, & 0 \le x < 2\pi \\ e^x & 2\pi \le x < 4\pi \end{cases}$$

calcolare la somma della sua serie di Fourier nei punti $x = 6\pi$ e $x = 11\pi$.

Soluzione:

(ii) Il punto $x = 11\pi$ è un punto di continuità per f, quindi la somma sarà data da:

$$S(11\pi) = S(3\pi) = f(3\pi) = e^{3\pi}.$$

Il punto $x = 6\pi$ è invece un punto di discontinuità per f, pertanto

$$S(6\pi) = S(2\pi) = \frac{f((2\pi)^+) + f((2\pi)^-)}{2} = \frac{1}{2}(e^{2\pi} + 0) = \frac{1}{2}e^{2\pi}.$$

Esercizio 5 (D2)**.** Dare un esempio di funzione di variabile complessa definita e olomorfa in un aperto A connesso ma non semplicemente connesso e che ammetta primitiva in A, enunciando per esteso i risultati teorici che si usano.

Soluzione:

Un esempio di funzione di variabile complessa che soddisfi le richieste è $f(z) = \frac{1}{z^2}$ (o più in generale $f(z) = \frac{1}{z^k}, k > 1$) definita in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ non semplicemente connesso. Infatti, essa ammette primitiva perché

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

per ogni curva chiusa γ contenuta in $\mathbb{C}^*$ (la condizione di integrale nullo è necessaria e sufficiente per l'esistenza di una primitiva in $\mathbb{C}^*$).
Si osservi che

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

sia nel caso in cui γ non contiene la singolarità $z_0 = 0$ e sia se γ contiene $z_0 = 0$. Infatti in quest'ultimo caso si avrebbe che

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2}dz = 2\pi i\, res(\frac{1}{z^2}, 0) = 0.$$