Sapienza - Università di Roma
Facoltà di Ingegneria - A.A. 2013-2014
Soluzioni appello del 31 gennaio 2014

Esercizio 1. Calcolare il seguente integrale di funzione di variabile complessa

$$\int_\gamma \frac{z^3 - i}{z^k}\, dz$$

dove γ é il bordo dell'insieme T definito da

$$T = \{z = x + iy \in C : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} \leq 1\}$$

al variare di $k \in N - \{0\}$.

Soluzione:

La funzione $f(z) = \frac{z^3-i}{z^k} = \frac{1}{z^{k-3}} - \frac{i}{z^k}$ ha un polo di ordine k nel punto $z_0 = 0$ che é interno alla regione di cui la curva γ é bordo.
Per il teorema dei residui $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\, res(f,0)$ al variare di $k = 1, 2, \ldots$.

Per $k = 1$ si ha $res(f,0) = -i$ e $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi$

Per $k = 2$ si ha $res(f,0) = 0$ e $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0.$

Per $k = 3$ si ha $res(f,0) = 0$ e $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0.$

Per $k = 4$ si ha $res(f,0) = 1$ e $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i.$

Per $k > 4$ si ha $res(f,0) = 0$ e $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0.$

Concludiamo che

$$\int_\gamma \frac{z^3 - i}{z^k}\, dz = \begin{cases} 2\pi & \text{per } k = 1 \\ 2\pi i & \text{per } k = 4 \\ 0 & \forall k \neq 1, 4 \end{cases}$$

Esercizio 2. Dato il segnale $f(t)$ definito come

$$f(t) = \begin{cases} e^{(2+i)t} & t \geq 3 \\ 2i & 0 \leq t < 3 \end{cases}$$

calcolarne l'ascissa di convergenza e la trasformata di Laplace.

Soluzione:

Per calcolare l'ascissa di convergenza di $f(t)$ prendiamo in considerazione soltanto l'integrale della funzione $|e^{-st}f(t)|$ in $[3, +\infty)$ (l'integrale di $|e^{-st}f(t)|$ in $[0, 3)$ é finito, poiché l'intervallo é limitato e la funzione é continua). Pertanto

$$\int_3^{+\infty} |e^{(i+2)t}e^{-st}|dt = \int_3^{+\infty} |e^{-st}|e^{2t}dt = \int_3^{+\infty} e^{t(-Re(s)+2)}dt$$

risulta finito se $Re(s) > 2$, da cui $\sigma[f] = 2$.

La trasformata di Laplace é data da:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_0^3 2ie^{-st}dt + \int_3^{+\infty} e^{(2+i)t}e^{-st}dt = -\frac{2ie^{-3s}}{s} + \frac{2i}{s} + \frac{e^{-3(s-i-2)}}{s-i-2}.$$

Esercizio 3.

(i) Esprimere il seguente integrale come somma di una serie numerica

$$\int_0^1 \cos(\sqrt{2x})dx$$

(ii) Calcolare poi l'integrale con un errore non superiore a 10^{-3}.

Soluzione:

(i) Utilizzando lo sviluppo in serie di potenze della funzione coseno si ha:

$$\cos(\sqrt{2x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{(2n)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

da cui per il teorema di integrazione termine a termine per le serie

$$\int_0^1 \cos(\sqrt{2x})dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(2n)!(n+1)}.$$

(ii) Utilizzando la stima per il resto per la serie di Leibniz, si ha:

$$|R_n| \leq |a_{n+1}| = \frac{2^{n+1}}{(2(n+1))!(n+2)}$$

per cui risulta che per $n = 3$

$$\frac{2^{n+1}}{(2(n+1))!(n+2)} < 10^{-3},$$

pertanto l'integrale si approssima nel modo seguente:

$$\int_0^1 \cos(\sqrt{2x})dx \cong 1 - \frac{1}{2} + \frac{2^2}{4!3} - \frac{2^3}{6!4}.$$

Esercizio 4 (D2)**.** Date le seguenti funzioni di variabile complessa

$$f(z) = \sin\left(\frac{1}{z-1}\right) \qquad z \in C - \{1\}$$

$$g(z) = \sin\left(\frac{1}{z-1}\right)^3 \qquad z \in C - \{1\}$$

definite in $C - \{1\}$ dire, motivando la risposta, se esse ammettono primitiva in $C - \{1\}$.

Soluzione

Sviluppando in serie la f si ha:

$$\sin\left(\frac{1}{z-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(z-1)^{2n+1}(2n+1)!}.$$

Pertanto

$$c_{-1} = res(f, 1) = 1$$

dove c_{-1} é il coefficiente del termine $\frac{1}{z-1}$ nello sviluppo in serie di Laurent della funzione. Avremo pertanto che

$$\int_\gamma \sin\left(\frac{1}{z-1}\right) = 2\pi i \neq 0,$$

per ogni curva chiusa γ contenuta in $C - \{1\}$ e contenente il punto singolare $z = 1$. Per la condizione necessaria e sufficiente sull'esistenza di una primitiva, $f(z)$ non puó ammettere primitiva in $\mathbb{C} - \{1\}$.

Per la funzione g ripetiamo lo stesso ragionamento sviluppando la funzione in serie di Laurent con centro in $z = 1$ e si ha che, essendo $c_{-1} = 0$, risulta

$$\int_\gamma \sin\left(\frac{1}{z-1}\right)^3 = 0$$

con γ una qualsiasi curva chiusa contenuta in $C - \{1\}$ e contenente la singolaritá $z = 1$.
Per ogni curva γ chiusa contenuta in $C - \{1\}$ e non contenente la singolaritá $z = 1$ l'integrale é nullo per il teorema di Cauchy. Pertanto $g(z)$ ammette primitiva in $\mathbb{C} - \{1\}$.