Sapienza - Università di Roma
Facoltà di Ingegneria - A.A. 2013-2014
Soluzioni appello del 31 gennaio 2014

Esercizio 1. Calcolare il seguente integrale di funzione di variabile complessa

$$\int_\gamma \frac{1}{z^k}(e^{1/z}-1)\,dz$$

dove γ é il bordo dell'insieme T definito da

$$T = \{z = x + iy \in C : |x| \le 1,\ |y| \le 2\}$$

al variare di $k \in \{0, 1, 2, ...\}$.

Soluzione:

Ricordando lo sviluppo in serie dell'esponenziale si ha che:

$$e^{1/z} - 1 = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{z^h h!},$$

e dunque

$$\frac{1}{z^k}(e^{1/z}-1) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{z^{h+k} h!}$$

Il punto $z = 0$, unica singolaritá per la funzione integranda, é singolaritá essenziale per ogni valore di k e cade all'interno della regione di cui γ é bordo. Per il teorema dei residui, per ogni valore di k si ha

$$\int_\gamma \frac{1}{z^k}(e^{1/z}-1)\,dz = 2\pi i\, res(\frac{1}{z^k}(e^{1/z}-1), 0)$$

Poiché il residuo é dato dal coefficiente c_{-1} nello sviluppo in serie di Laurent della funzione attorno al punto, risulta che il residuo é 1 per $k = 0$ ed é 0 per $k \ge 1$. Quindi

$$\int_\gamma \frac{1}{z^k}(e^{1/z}-1)\,dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{per } k = 0 \\ 0 & \text{per } k \ge 1 \end{cases}$$

Esercizio 2. Dato il segnale $f(t)$ definito come

$$f(t) = \begin{cases} e^{(2i-1)t} & t \ge \pi \\ \cos t & 0 \le t < \pi \end{cases}$$

calcolarne l'ascissa di convergenza e la trasformata di Laplace.

Soluzione:

Per calcolare l'ascissa di convergenza di $f(t)$ prendiamo in considerazione soltanto l'integrale della funzione $|e^{-st} f(t)|$ nell'intervallo $[\pi, +\infty)$ (l'integrale di $|e^{-st} f(t)|$ nell'intervallo $[0, \pi)$ é finito, poiché l'intervallo é limitato e la funzione é continua). Pertanto

$$\int_\pi^{+\infty} |e^{(2i-1)t} e^{-st}| dt = \int_\pi^{+\infty} e^{t(Re(s)+1)} dt$$

risulta finito se $Re(s) > -1$, da cui $\sigma[f] = -1$.

La trasformata di Laplace é data da:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\pi} \cos e^{-st} dt + \int_\pi^{+\infty} e^{(2i-1)t} e^{-st} dt = \frac{s}{s^2+1}(e^{-s\pi}+1) + \frac{1}{s+1-2i} e^{-\pi(-2i+1+s)}$$

Esercizio 3.

(i) Esprimere il seguente integrale come somma di una serie numerica

$$\int_0^1 \sin(3x)dx$$

(ii) Calcolare poi l'integrale con un errore non superiore a 0.003.

Soluzione:

(i) Utilizzando lo sviluppo in serie di potenze della funzione seno si ha:

$$\sin 3x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

da cui per il teorema di integrazione termine a termine per le serie

$$\int_0^1 \sin 3x \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+2)}.$$

(ii) Utilizzando la stima per il resto per la serie di Leibniz, si ha:

$$|R_n| \le |a_{n+1}| = \frac{3^{2n+3}}{(2n+3)!(2n+4)}$$

per cui risulta che per $n = 4$

$$\frac{3^{2n+3}}{(2n+3)!(2n+4)} < 3 \cdot 10^{-3},$$

pertanto l'integrale si approssima nel modo seguente:

$$\int_0^1 \sin 3x \, dx \cong \frac{3}{2} - \frac{3^3}{3!4} + \frac{3^5}{5!6} - \frac{3^7}{7!8} + \frac{3^9}{9!10}$$

Esercizio 4 (D2)**.** Date le seguenti funzioni di variabile complessa

$$f(z) = e^{1/z^5} - 1 \qquad z \in C^*$$

$$g(z) = e^{1/z^{10}} - 1 \qquad z \in C^*$$

definite in C^* dire, motivando la risposta, se esse ammettono primitiva in C^*.

Soluzione

Le funzioni ammettono entrambe primitiva in C^*.
Infatti il residuo nell'unico punto singolare $z = 0$ é nullo per entrambe come si vede dal loro sviluppo in serie di Laurent di centro $z_0 = 0$. Dunque per entrambe l'integrale lungo una qualunque curva chiusa γ contenuta in C^* e contenente al suo interno il punto singolare $z_0 = 0$ é nullo. Gli integrali lungo curve chiuse di C^* che non contengano $z_0 = 0$ sono nulli per il teorema di Cauchy. A questo punto basta applicare la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una primitiva.