Sapienza - Università di Roma
Facoltà di Ingegneria - A.A. 2014-2015
Soluzioni appello Metodi Matematici per l'Ingegneria/Analisi Matematica III del 19 gennaio 2015

Esercizio 1. Data la seguente funzione di variabile complessa:

$$f(z) = \sum_{n=-4}^{+\infty} (z-4i)^n \frac{1}{|2n+10|^n}$$

trovare l'insieme in cui é analitica; trovare inoltre i suoi punti singolari, classificarli e calcolare il residuo in quei punti .

Soluzione:
La parte regolare della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (z-4i)^n \frac{1}{|2n+10|^n}$$

ha raggio di convergenza $\rho = +\infty$ e dunque converge in $\mathbb{C}$.
La parte singolare

$$\sum_{n=-4}^{-1} (z-4i)^n \frac{1}{|2n+10|^n}$$

é definita in $\mathbb{C} \setminus \{4i\}$ e converge in quanto composta da un numero finito di termini, pertanto l'insieme di analiticitá é $\mathbb{C} \setminus \{4i\}$.
L'unico punto singolare é $z = 4i$ che é un polo di ordine 4. Il residuo di $f(z)$ in $z = 4i$ é $c_{-1} = 8$.

Esercizio 2. Usando la trasformata di Laplace, calcolare la soluzione $y_n(t)$ del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) = -ny(t) \\ \\ y(3n) = 0 \\ \\ y'(3n) = 1 \end{cases}$$

(ii) Calcolare $\lim_{n\to+\infty} y_n(t), \quad t \geq 0.$

Soluzione:

(i) Le condizioni iniziali non sono assegnate in 0. Ci si riconduce quindi ad un problema con condizioni iniziali in 0. Pertanto si pone $\tilde{y}(t) = y(t+3n)$ e quindi la $\tilde{y}(t)$ deve soddisfare un problema di questo tipo:

$$\begin{cases} \tilde{y}''(t) = -n\tilde{y}(t) \\ \tilde{y}(0) = 0 \\ \tilde{y}'(0) = 1. \end{cases}$$

Ponendo $\tilde{Y}(s) = \mathcal{L}[\tilde{y}](s)$ e operando le opportune sostituzioni nel problema precedente si ottiene

$$s^2\tilde{Y}(s) + n\tilde{Y}(s) = 1$$

da cui

$$\tilde{Y}(s) = \frac{1}{s^2+n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}(s^2+(\sqrt{n})^2)}.$$

Antitrasformando si ottiene che

$$\tilde{y}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\sqrt{n}t.$$

Ricordando ora la trasformazione iniziale si ha che

$$y_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(\sqrt{n}(t-3n)).$$

(ii) Risulta che

$$\lim_{n\to+\infty} y_n(t) = 0, \quad \forall t.$$

Esercizio 3. Calcolare il seguente integrale con i metodi della variabile complessa

$$(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^3-1)(x-2)} dx.$$

Soluzione:

La funzione integranda non é integrabile in $x = 1$ ed $x = 2$.
L'estensione della funzione integranda in campo complesso é data da

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)(z^2+z+1)}.$$

Sia γ la curva chiusa (percorsa nel verso usuale) ottenuta concatenando una semicirconferenza di raggio $R > 2$ nel semipiano $Imz > 0$, il segmento $[-R, 1-\epsilon]$, la semicirconferenza γ_{ϵ_1} definita da $|z-1| = \epsilon_1$ contenuta nel semipiano $Imz > 0$, il segmento $[1+\epsilon_1, 2-\epsilon_2]$, la semicirconferenza γ_{ϵ_2} definita da $|z-2| = \epsilon_2$ contenuta nel semipiano $Imz > 0$, (con $\epsilon_1 + \epsilon_2 < 1$), ed il segmento $[2+\epsilon_2, R]$.
Le singolaritá di f sono $z_0 = 1, z_1 = 2, z_2 = e^{i\frac{2}{3}\pi}, z_3 = e^{i\frac{4}{3}\pi}$ e sono tutti poli semplici.
L'unica singolaritá interna a γ é z_0.
Utilizzando il teorema dei residui, il lemma del grande cerchio ed il lemma del polo semplice si trova che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^3-1)(x-2)} dx = 2\pi\, i\, res(f, e^{i\frac{2}{3}\pi}) + \pi\, i\, [res(f,1) + res(f,2)] = 2\pi i \frac{1}{3-6e^{i\frac{4}{3}\pi}} - \frac{4}{21}\pi i.$$

Esercizio 4 (D1)**.**
(i) Usando le condizioni di Cauchy-Riemann, provare che, se $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ é una funzione olomorfa in C, i vettori $gradu$ e $gradv$ sono ortogonali.

(ii) Data la funzione

$$u(x,y) = y^2 + 4y - x^2 + 2x$$

determinare $v(x,y)$ in modo tale che $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ sia olomorfa in C e determinare f come funzione della variabile complessa z.

Soluzione:

(ii) Utilizzando le condizioni di Cauchy Reimann si trova che

$$u_x = -2x + 2 = v_y,$$

$$u_y = 2y + 4 = -v_x$$

da cui dalla prima condizione si ricava

$$v(x,y) = -2xy + 2y + g(x)$$

mentre dalla seconda

$$v(x,y) = -2xy - 4x + h(y).$$

Pertanto risulta che

$$g(x) = -4x, \quad h(y) = 2y.$$

La funzione $v(x,y)$ é data da

$$v(x,y) = -2xy + 2y - 4x$$

quindi

$$f(x,y) = y^2 + 4y - x^2 + 2x + i(-2xy + 2y - 4x) = y^2 - x^2 - 2ixy + 4y - x^2 + 2x + 2iy - i4x =$$

$$(i(x+iy))^2 - 4i(x+iy) + 2(x+iy) = (iz)^2 + z(2-4i).$$

Esercizio 5 (D2)**.** Data la funzione $f(t)$, periodica di periodo 4 e definita nell'intervallo $[0,4)$ come

$$f(t) = \begin{cases} (8-t)|t-3|^\alpha & \text{se} \quad t \neq 3 \\ \\ 2 \quad \text{se} \quad t = 3, \end{cases}$$

(i) dire per quali valori del parametro reale α essa é continua a tratti, per quali é regolare a tratti e per quali é sommabile in $[0,4)$

(ii) per i valori di α per cui é regolare a tratti, calcolare la somma $S(t)$ della sua serie di Fourier nei punti $t = 20$ and $t = 17$.

Soluzione:

(i) La funzione $f(t)$ risulta continua a tratti per $\alpha \geq 0$, regolare a tratti per $\alpha \geq 1$ e $\alpha = 0$ e sommabile in $[0,4)$ per $\alpha > -1$.
(ii) Per $\alpha \geq 1$ la somma $S(t)$ della serie di Fourier di f nei punti $t = 20$ e $t = 17$ é data rispettivamente da

$$S(20) = S(4) = \frac{4 + 8 \cdot 3^\alpha}{2}$$

$$S(17) = S(1) = f(1) = 7 \cdot 2^\alpha.$$

Per $\alpha = 0$ la funzione $f(t)$ é data da

$$f(t) = \begin{cases} 8 - t & \text{se} \quad t \neq 3 \\ \\ 2 \quad \text{se} \quad t = 3, \end{cases}$$

e la somma $S(t)$ della serie di Fourier di f nei punti $t = 20$ e $t = 17$ é data rispettivamente da

$$S(20) = S(4) = 6$$

$$S(17) = S(1) = f(1) = 7.$$