Sapienza - Università di Roma
Facoltà di Ingegneria - A.A. 2014-2015
Soluzioni appello Metodi Matematici per l'Ingegneria/Analisi Matematica III del 20 marzo 2015

Esercizio 1. Data la seguente funzione di variabile complessa:

$$f(z) = \sum_{n=-5}^{+\infty} (z-i)^n (|2n|^3 - 3)$$

trovare l'insieme in cui é analitica; trovare inoltre i suoi punti singolari, classificarli e calcolare il residuo in quei punti .

Soluzione:

L'insieme di analiticiá é $0 < |z-i| < 1$. Infatti la parte singolare converge per $0 < |z-i|$ e la parte regolare ha raggio di convergenza 1 dunque converge per $|z-i| < 1$. L'unico punto singolare é $z_0 = i$, che risulta essere un polo del quinto ordine. Il residuo é $c_{-1} = 5$.

Esercizio 2. Data la successione di funzioni di due variabili reali

$$f_n(x,y) = arctg(x^2 + y^2 - n^2) \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

individuare l'insieme A di convergenza puntuale e la funzione limite $f(x,y)$. Dire se la convergenza è uniforme in A. Se non lo è, individuare almeno un sottoinsieme di A in cui ci sia covergenza uniforme.

Soluzione:

Operando la sostituzione $x^2 + y^2 = t$, si trova che

$$\lim_{n\to+\infty} \arctan(t - n^2) = -\frac{\pi}{2},$$

pertanto la successione di funzioni $f_n(t)$ converge puntualmente a $-\frac{\pi}{2}$ in $[0, +\infty)$.
In $[0, +\infty)$ non c'é convergenza uniforme, in quanto, ad n fissato,

$$\sup_{t\in[0,+\infty)} [\arctan(t - n^2) + \frac{\pi}{2}] = \pi.$$

Mentre si ha convergenza uniforme in ogni intervallo del tipo $[0, a]$, con $a > 0$, infatti

$$\sup_{t\in[0,a]} [\arctan(t - n^2) + \frac{\pi}{2}] = \arctan(a - n^2) + \frac{\pi}{2} \to 0$$

per $n \to +\infty$.

Esercizio 3. Calcolare con i metodi della variabile complessa il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cosx}{x^3 + 1} dx$$

Soluzione:

Essendo

$$\frac{\cos x}{x^3 + 1} = Re\left(\frac{e^{ix}}{x^3 + 1}\right)$$

si ha che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cosx}{x^3 + 1} dx = Re \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^3 + 1} dx.$$

Usando il il lemma di Jordan, il teorema dei residui ed il lemma del polo semplice si trova che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^3+1}dx = 2\pi i\, res(\frac{e^{iz}}{z^3+1}, e^{i\frac{\pi}{3}}) + \pi i\, res(\frac{e^{iz}}{z^3+1}, -1).$$

Ne segue che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cosx}{x^3+1}dx = Re\left(\frac{2}{3}\pi i e^{\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}-2i\frac{\pi}{3}} + \pi i\frac{e^{-i}}{3}\right) = -e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{2}{3}\pi\sin(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\pi) + \frac{\pi}{3}\sin(1).$$

Esercizio 4 (D1)**.** Dire, motivando la risposta, se le seguenti funzioni sono trasformate di Laplace di un segnale ed eventualmente determinare tale segnale

$$F_1(s) = \frac{e^{-s}}{s^2+s+1},$$

$$F_2(s) = \frac{e^{-s^3}}{s}.$$

Soluzione:

La funzione $F_1(s)$ é la trasformata del segnale $f_1(t) = g_1(t-1)$, dove $g_1(t)$ é l'antitrasformata della funzione $G_1(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$. La funzione $G_1(s) = O\left(\frac{1}{s^2}\right)$ per $|s| \to +\infty$ e G é olomorfa nel semipiano destro $Res > -\frac{1}{2}$. Pertanto si puó calcolare il segnale ad esempio utilizzando i residui (della funzione nei punti singolari), e si ottiene che

$$f_1(t) = -\frac{\sqrt{3}}{3}i\left[e^{(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})(t-1)} - e^{(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})(t-1)}\right].$$

Al contrario, la funzione $F_2(s)$ non é trasformata di alcun segnale. Infatti, se $s = x + iy$, risulta che

$$\left|\frac{e^{-s^3}}{s}\right| = \frac{e^{-x^3+3xy^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Pertanto la funzione $F_2(s)$ non é limitata in alcun semipiano destro $Re\, s \geq \alpha$. .

Esercizio 5 (D2)**.**

(i) Data la funzione

$$F(z) = Log(i - z^2),$$

individuare l'insieme di definizione e l'insieme di olomorfia.

(ii) Dire (senza provare a calcolarla) se ammette primitiva nell'insieme di olomorfia e spiegare perchè .

Soluzione:

(i) L'insieme di definizione é $\mathbb{C} \setminus \{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\sqrt{2}\}$ (si trova imponendo $i - z^2 \neq 0$). Osservando che

$$i - z^2 = -x^2 + y^2 + i(1-2xy)$$

si trova che $Re(i-z^2) = -x^2+y^2$, mentre $Im(i-z^2) = 1-2xy$. Pertanto l'insieme di olomorfia é

$$\mathbb{C} \setminus \{z = x+iy \in \mathbb{C} : -|x| \leq y \leq |x|, xy = \frac{1}{2}\}.$$

(ii) L'aperto di olomorfia trovato al punto precedente é semplicemente connesso. Pertanto la funzione ammette primitiva, essendo olomorfa in un aperto semplicemente connesso.