METROLOGIA

(insieme delle regole e delle tecniche che conducono alla misura di grandezze fisiche)

Per operare nella realtà (è il compito degli ingegneri) è necessario descrivere i fenomeni in modo:

• **OGGETTIVO** (non dipendente dalle qualità, sensazioni e/o preconcetti dell'osservatore)

• **INEQUIVOCABILE** (la valutazione di un osservatore deve essere comprensibile a tutti gli utilizzatori dell'osservazione)

• **RIPRODUCIBILE** (in ogni tempo e luogo la stessa osservazione dello stesso fenomeno deve produrre lo stesso risultato)

Pertanto descriveremo i fenomeni solo in termini di grandezze fisiche (entità suscettibili di valutazione quantitativa ed oggettiva, cioè di misurazione)

Misurazione: determinazione di quante volte "g" la grandezza fisica in esame "G" "contiene" una grandezza di riferimento "[g]" ad essa omogenea

G: grandezza fisica

g: misura

[g]: unità di misura

$$\boxed{G = g\,[g]}$$

Una grandezza viene detta grandezza fisica se è possibile specificare la serie di operazioni (**definizione operativa di g.f.**) che ne consente la misurazione. Pertanto nel momento in cui viene data la definizione operativa di una grandezza fisica viene anche stabilito come misurarla.

Si dicono **omogenee** quelle g.f. che hanno una stessa caratteristica misurabile: lunghezza di un righello, diametro di una circonferenza, altezza di un oggetto ...

È chiaro come per ottenere una grandezza [g] di riferimento occorrano delle convenzioni riconosciute e adottate a livello internazionale.

Perché delle quantità siano grandezze fisiche devono essere misurabili occorre cioè che sull'insieme delle g.f. omogenee sia possibile definire:

1) **ordinamento**: deve essere possibile ordinare in senso crescente o decrescente g.f. omogenee: p.es. ordinare dei righelli in modo che il più corto venga prima del più lungo.
Ciò significa che deve essere possibile stabilire una corrispondenza fra g.f. omogenee e l'insieme dei numeri reali di modo che

se: $G(A) \leftrightarrow g(A)$, $G(B) \leftrightarrow g(B)$ e $G(A)$ ⧁ $G(B)$
allora ne segue[1] $g(A) > g(B)$

Perché ciò sia possibile occorre anche aver definito un criterio per stabilire se una g.f. è maggiore o minore di un'altra ad essa omogenea. Spesso ciò richiede l'utilizzazione di uno strumento per operare il confronto: bilancia, termometro, etc.

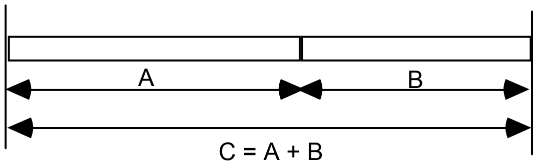
---

[1] Col simbolo ⧁ indichiamo un'operazione materiale di confronto (accostamento di righelli per determinare quale sia il più lungo, confronto fra le forze esercitate da due masse per determinare quale sia la maggiore, ordine di arrivo ad un traguardo per determinare la velocità più elevata, ecc.).

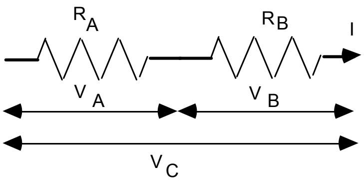
2) operazione di **somma**: se $G(C) = G(A) \oplus G(B)$,

allora $g(C) = g(G(A) \oplus G(B)) = g(A) + g(B)$

Nel caso di righelli è ovvio il significato dell'operazione di somma (qui indicata col simbolo ⊕): basta accostare l'estremità destra del primo con quella sinistra del secondo (disposti sulla stessa retta) e considerare la lunghezza somma quella che va dall'estremità sinistra del primo a quella destra del secondo:

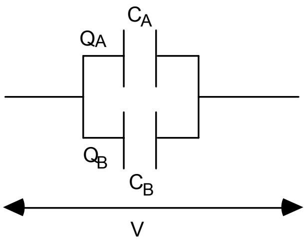


Similmente nel caso di resistenze elettriche:



Per la legge di Ohm $V_A = R_A I$, $V_B = R_B I$ e $V_C = R_S I$ dove con R_S si intende la resistenza somma ottenuta connettendo elettricamente le due resistenze come in figura.
Poiché per l'additività del potenziale $V_C = V_A + V_B$, risulta che $R_S = R_A + R_B$.

Nel caso di capacità elettriche l'operazione di somma richiede invece la connessione:



infatti per definizione di capacità $C = Q/V$ e quindi $C_A = Q_A/V$, $C_B = Q_B/V$
e la capacità totale $C_P = Q_T/V$.
Poiché la carica elettrica è additiva, risulta $Q_T = Q_A + Q_B$ e quindi: $C_P = C_A + C_B$.

Analogamente si può procedere per definire la somma di altre g.f. come, ad esempio, induttanze, forze elettromotrici, campi elettrici e magnetici. Provate voi a definire l'operazione di somma per queste g.f.

Esistono però casi in cui l'operazione di somma è invece impossibile (g.f. non additiva). Per esempio, comunque si mettano in contatto due corpi a temperatura diversa si avrà che all'equilibrio la temperatura sarà compresa fra le temperature iniziali dei due corpi.
Per questa g.f. e altre analoghe (p.es. la pressione) si cerca una corrispondenza biunivoca fra la g.f. e un'altra per la quale è definibile l'operazione di somma (p.es. sfruttando la relazione che lega la dilatazione dei corpi alla temperatura, la temperatura può essere posta in relazione con la lunghezza della colonnina di mercurio in un termometro).

3) **unità**: viene definita unitaria una g.f. per la quale $G(U) \leftrightarrow g(U) = 1$.

Definita una g.f. è possibile effettuarne la misura contando quante volte deve essere applicata l'operazione ⊕ all'unità [g] fino ad ottenere esattamente G.

MULTIPLI E SOTTOMULTIPLI

Spesso la g.f. scelta come unitaria è troppo grande o troppo piccola rispetto alle g.f. sulle quali si opera. Conviene quindi realizzare multipli e sottomultipli dell'unità di misura. Banalmente per i multipli è sufficiente utilizzare l'operazione di somma relativa alla g.f. in questione. Per i sottomultipli occorre provare a suddividere una copia dell'unità in parti tutte uguali fra loro. Se la procedura e/o lo strumento utilizzati per operare il confronto confermano l'uguaglianza dei sottomultipli, lo scopo è raggiunto.
In alcuni casi si preferisce utilizzare come sottomultipli la suddivisione in due parti uguali (Sistema Inglese) ottenendo come sottomultipli 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, etc. Molto più spesso si preferisce una suddivisione in dieci parti (sistema metrico decimale, S.I.).

MISURE DIRETTE E DERIVATE

Il metodo di misura illustrato è detto diretto o fondamentale perché si basa sul confronto diretto con un campione riproducente l'unità di misura. Tuttavia, per la maggior parte delle grandezze, si incontrano notevoli difficoltà nella costruzione, distribuzione e uso di campioni con le necessarie caratteristiche di stabilità e riproducibilità.

L'esistenza di legami funzionali tra le grandezze fisiche permette, comunque, di superare tali difficoltà: nota con sufficiente approssimazione una relazione funzionale $Y=f(X_1, X_2, ..., X_N)$ tra la grandezza Y in misura e altre grandezze $X_1, X_2, ..., X_N$ misurate col metodo fondamentale, tramite un calcolo si può risalire alla misura di Y (misurazione indiretta o derivata).

Consideriamo come esempio la misura del volume V di un recipiente di forma parallelepipeda. Per effettuarne la misura col metodo fondamentale, si deve prima procedere alla scelta del campione di unità di misura (p.es. un altro opportuno recipiente al cui volume viene assegnato il valore unitario) e quindi determinare per confronto il numero da associare al volume incognito, cioè determinare quante volte il campione "entra" in V.
Con il metodo derivato, invece, data la forma geometrica elementare del recipiente è facile stabilire la relazione tra il volume V e le lunghezze L_i degli spigoli del parallelepipedo: $V= L_1 \times L_2 \times L_3$
La misura di volume è perciò ricondotta alla misura di lunghezze.

Si noti che si possono inquadrare tra le misurazioni derivate anche le misurazioni delle grandezze non-additive: in questo caso si cerca una relazione funzionale fra la grandezza non additiva in misura e una additiva che può essere misurata direttamente. Ad esempio la temperatura è una grandezza non additiva ma nei termometri a liquido la temperatura viene messa in relazione con l'altezza della colonnina di liquido termometrico sfruttando la relazione fra dilatazione termica e temperatura.

CRITERI DI SCELTA PER LE UNITÀ DI MISURA

Ogni grandezza fisica, per essere misurata direttamente, richiede una unità di misura (e quindi un campione di unità di misura). La scelta è illimitata e dettata solo da motivi di praticità. Analizziamo alcuni criteri generali che possono guidare nella scelta delle unità di misura.

1) Analizziamo questa identità: $1\ \text{m} = 5\ \text{dm} + 50\ \text{cm}$

essa è formalmente corretta ma poco pratica: $1 \neq 5 + 50$

Generalizzando, se $G(C) = G(A) \oplus G(B)$

da cui $g(C)\,[C] = g(A)\,[A] + g(B)\,[B]$

generalmente si ha $g(C) \neq g(A) + g(B)$

tuttavia se [A]=[B]=[C], allora: $g(C) = g(A) + g(B)$

questo è un **primo criterio di coerenza**

In base ad esso <u>g.f. omogenee devono essere misurate utilizzando la stessa unità di misura</u> e quindi, se si adottasse questo criterio, per poter misurare tutte le g.f. ci sarebbe bisogno di una sola unità di misura per ogni gruppo di g.f. omogenee.

2) Consideriamo la misurazione derivata della superficie di un rettangolo di area S e lati b e h

$$G(S) = G(b) \otimes G(h)$$

cioè[2] $g(S)\,[S] = g(b)\,[b] \times g(h)\,[h]$

Adottando il precedente criterio di coerenza [b]=[h]=[L], si ottiene:

$$g(S)\,[S] = g(b)\,[L] \times g(h)\,[L]$$

In questo caso, anziché scegliere per la misura della superficie una nuova unità di misura, conviene scegliere $[S] = [L]^2$ così da ottenere: $g(S) = g(b) \times g(h)$

secondo criterio di coerenza: conviene <u>utilizzare per la misura di g.f. che sono funzione di altre, unità di misura espresse in termini di queste ultime</u>

Per esempio 3,6 km/h = 1 m/1 s, ma 3,6 ≠ 1/1: è preferibile in questo caso misurare le velocità in m/s.

Qual è il numero minimo di unità di misura (fondamentali) diverse necessario per poter misurare tutte le g.f. ?

Per studiare <u>tutti</u>[3] i fenomeni che riguardano la <u>geometria</u> avremo bisogno di poter misurare (e quindi dovremo definire le relative unità di misura e successivamente i relativi campioni di unità di misura):

lunghezza [L] **superficie** [S] **volume** [V]

Sappiamo però p.es. che l'area di un rettangolo è pari al prodotto di base per altezza e quella di un triangolo 1/2 base per altezza. Al di là del fattore numerico una superficie è pari al prodotto di due lunghezze e quindi, coerentemente, sceglieremo $[S] = [L]^2$.

Analogamente per il volume sceglieremo $[V] = [L]^3$.

Pertanto sarà sufficiente, per studiare la geometria definire una sola grandezza unitaria: le altre due possono essere ricavate a partire da questa.

---

2 il simbolo ⊗ è stato introdotto in analogia con ⊕ che definiva le operazioni materiali di confronto ⧁ e somma .

3 nel campo della geometria esistono anche due quantità che a rigore non necessitano di unità di misura: l'angolo piano e l'angolo solido. Esse sono rispettivamente il rapporto fra un arco di circonferenza e il suo raggio ([L]/[L]) e il rapporto fra una porzione di superficie sferica e il quadrato del suo raggio ($[S]/[L]^2$). Per riconoscere queste due g.f. si utilizzano rispettivamente il radiante (rad) e lo steradiante (sr).

Per studiare la <u>cinematica</u> dovremo poter misurare altre g.f.:

tempo [T] **frequenza** [f] **velocità** [v] **accelerazione** [a] **...** [...]

Poiché tutte le grandezze introdotte sono ricavabili l'una dall'altra ricorrendo alle loro definizioni f=1/T, v=s/t, a=v/t ... è sufficiente, sfruttando la necessità di un sistema coerente, introdurre una sola grandezza fisica unitaria.

Analogamente per studiare la meccanica dovremo introdurre come g.f. fondamentale solo la massa o la forza o l'energia o altre grandezze meccaniche in quanto anche queste sono collegate le une alle altre da definizioni o leggi fisiche (p.es. F= m a).

Il numero di g.f. fondamentali è pari al numero delle g.f. totali diminuite del numero di relazioni geometriche, definizioni, leggi fisiche, etc. (relazioni base) che le correlano:

$$\boxed{\mathbf{N_{fond.} = N_{g.f.} - N_{rel.}}}$$

È possibile ridurre ulteriormente il numero delle grandezze fondamentali (e quindi di campioni di unità di misura) aggiungendo alle equazioni-base delle **convenzioni di coordinazione.** Esse consistono nell'assegnare convenzionalmente un particolare valore adimensionale a un parametro costante che compare in una legge fisica (i sistemi c.g.s.$_{e.s.}$ e c.g.s.$_{e.m.}$ che analizzeremo in seguito utilizzano tali convenzioni).

L'uso delle convenzioni di coordinazione può essere illustrato dal seguente esempio.

Se, riferendoci alla parte meccanica in cui $\mathbf{N_{fond.}}$=3, accanto all'equazione-base

$F = G\,\dfrac{m_1\, m_2}{r^2}$ che esprime la legge di gravitazione universale si imponesse che la costante gravitazionale G fosse un numero puro di valore unitario, $\mathbf{N_{fond.}}$ si ridurrebbe a 2.

Se si stabilissero poi altre 2 convenzioni di coordinazione, per es. 1) costante di Planck h = 1 nella relazione E = h ν tra l'energia E di un quanto di radiazione e la sua frequenza ν, 2) velocità di un'onda elettromagnetica nel vuoto c = 1, allora si otterrebbe $\mathbf{N_{fond.}}$ uguale a zero e non ci sarebbe quindi più bisogno di introdurre campioni.

Tuttavia questa condizione estrema ($\mathbf{N_{fond.}}$=0), pur conveniente (e utilizzata) in alcuni settori teorici, non è pratica perché non consente di sfruttare la potenza del calcolo dimensionale cui si accennerà fra poco.

Considerato quindi un certo settore della fisica e indicato con $N_{coord.}$ il numero delle convenzioni di coordinazione, si ottiene:

$$\boxed{\mathbf{N_{fond.} = N_{g.f.} - N_{rel.} - N_{coord.}}}$$

NOTAZIONI, EQUAZIONI E CALCOLO DIMENSIONALI

Utilizzando la notazione di Maxwell ogni g.f. può essere espressa in termini delle g.f. scelte come fondamentali; vediamo degli esempi:

- consideriamo la definizione di velocità: $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$.

Questa relazione vettoriale corrisponde a tre relazioni scalari; esaminiamo una di queste: $v_x = \frac{dx}{dt}$ (le altre si comporteranno allo stesso modo).
Essa altri non è che il rapporto fra una lunghezza e un tempo[4] e quindi coerentemente verrà misurata utilizzando l'unità di misura [v] = [L]/[T].

Dalla relazione [v] = [L]/[T] si può ricavare immediatamente il **grado di omogeneità** delle grandezze coinvolte, infatti assumendo un'unità di lunghezza n_L volte più piccola, la misura di $\vec{v}$ resta moltiplicata per n_L; assumendo un'unità di tempo n_T volte più piccola, la misura di $\vec{v}$ resta moltiplicata per n_T; assumendo infine un'unità di massa n_M volte più piccola, la misura di $\vec{v}$ non viene alterata. Ciò si esprime dicendo che una velocità ha una omogeneità di grado 1 rispetto alla lunghezza, di grado -1 rispetto al tempo e di grado 0 rispetto alla massa.

- Altro esempio:
se le g.f. fondamentali scelte sono lunghezza [L], massa [M], tempo [T], temperatura [θ] e carica elettrica [Q], allora la forza [F] si esprime come: $[F] = [L]^1\, [M]^1\, [T]^{-2}\, [\theta]^0\, [Q]^0$
cioè la forza ha grado di omogeneità 1 con la lunghezza e la massa, -2 con il tempo e 0 con la temperatura e la carica elettrica.
Infatti la legge **F = m a** indica che la forza ha omogeneità 1 sia con la massa che con l'accelerazione. Utilizzando la relazione $a=d^2s/dt^2$ si ha $[a] = [L]^1\, [T]^{-2}$ e quindi il risultato.

- Se invece le g.f. fondamentali fossero massa [M], velocità [v], volume [V], temperatura [θ] e carica elettrica [Q], allora la forza [F] varrebbe: $[F] = [M]^1\, [v]^2\, [V]^{-1/3}\, [\theta]^0\, [Q]^0$
In questo caso le dimensioni dell'accelerazione si ricavano a partire dalle relazioni base: $[v] = [L]\, [T]^{-1}$ e $[V] = [L]^3$;
detti rispettivamente a e b gli esponenti di [v] e [V], imponiamo che sia $[v]^a\, [V]^b = [L]^1\, [T]^{-2}$ da cui si ricava: $([L]\, [T]^{-1})^a([L]^3)^b = [L]^{a+3b}\, [T]^{-a} = [L]^1\, [T]^{-2}$ e quindi le equazioni:
$a + 3\,b = 1$ $-a = -2$ che portano al risultato $a = 2$ $b = -\,1/3$

- Un caso frequente: gli argomenti di funzioni sviluppabili in serie di potenze (p.es. e^x, sin(x), log(x), sinh(x), ...) hanno sempre dimensione 1. Infatti lo sviluppo in serie di potenze altri non è che un polinomio i cui termini devono avere le stesse dimensioni per poter essere sommati: dovendo essere $[x]^n=[x]^m$ per ogni n e m, l'uguaglianza implica [x]=1.

Queste equazioni tra unità di misura si dicono **equazioni dimensionali**.

Grandezze fisiche omogenee hanno le stesse dimensioni e sono misurate confrontandole con la stessa unità di misura. Non è sempre vero il viceversa: grandezze di specie diversa possono risultare equidimensionate. Ne sono esempi la pressione e modulo di Young, capacità termica ed entropia, lavoro e momento di una coppia.

---

4 Il fatto che dx e dt siano quantità infinitesime non altera la sostanza del ragionamento

Oltre alle grandezze dimensionate esistono anche grandezze adimensionate. Nel sistema di unità di misura che adotteremo (il Sistema Internazionale) ne sono esempi gli angoli piani e solidi, l'indice di rifrazione, i rendimenti e in generale tutte le grandezze definite dal rapporto di grandezze equidimensionate (come ad esempio le costanti dielettriche relative o le permeabilità magnetiche relative).

Il **calcolo dimensionale** permette di condurre un'analisi qualitativa delle varie grandezze che compaiono nello studio dei fenomeni fisici valutando la natura delle grandezze che compaiono in una relazione algebrica, differenziale, vettoriale, ecc. facendo astrazione dal numero che esprime il "valore" delle grandezze.

●●●● Un primo risultato di questo tipo di calcolo è il controllo dimensionale: i due membri di una equazione, o i vari addendi di un polinomio, devono essere g.f. omogenee.

Condizione necessaria (ma non sufficiente) **per la validità di una formula fisica è che le dimensioni dei due membri di un'equazione, o degli addendi di un polinomio, siano le stesse**.

Questo tipo di calcolo è estremamente rapido da effettuare ma si rivela uno strumento assai potente per verificare (in parte) la validità dei risultati ottenuti in qualsiasi tipo di indagine fisica.
<u>Sfuggono però a questo controllo dimensionale gli errori dovuti ad errati coefficienti numerici, o a confusione tra grandezze equidimensionate, o alla presenza di grandezze adimensionate.</u>

●●●● L'omogeneità ci permette di trarre utili indicazioni sulla struttura matematica delle leggi fisiche. Occorre notare che mentre una legge fisica è una relazione fra diverse entità fisiche e come tale non dipende dalle nostre convenzioni e/o notazioni, la rappresentazione matematica di una legge fisica è possibile solo quando si sia scelto un particolare sistema di unità di misura e può cambiare se quest'ultimo viene cambiato.
Tuttavia, **se i sistemi di unità di misura rispettano la coerenza e sono costituiti dalle stesse grandezze fondamentali, allora la rappresentazione matematica delle leggi fisiche è invariante di fronte a ogni cambiamento di unità.**

Così per esempio la legge fondamentale della meccanica è matematicamente espressa dall'equazione **F=ma** sia che si adotti il Sistema Internazionale sia che si adottino i sistemi c.g.s. (le unità fondamentali meccaniche sono le medesime per tali sistemi). Ne consegue che risulteranno invarianti, di fronte ad ogni cambiamento di unità, anche tutte le leggi che siano conseguenza della legge fondamentale.

Si può intuire quindi come l'analisi del grado di omogeneità fornisca un mezzo per prevedere l'espressione matematica di leggi fisiche. Esaminiamo alcuni esempi.

● Supponiamo di voler ricavare la dipendenza del periodo delle piccole oscillazioni di un pendolo dalla lunghezza l del filo, la massa m e l'accelerazione di gravità g. In tal caso si può scrivere $T = k\, m^a\, l^b\, g^c$ dove a, b, c sono gli esponenti da ricavare in base all'analisi dimensionale e k è un fattore numerico adimensionale che non sarà possibile ottenere per questa via. Costruiamo la seguente tabella:

		[L]	[T]	[M]
m	a	0	0	1
l	b	1	0	0
g	c	1	-2	0
T		0	1	0

Il suo significato è il seguente:
la massa m ha dimensioni $[L]^0\,[T]^0\,[M]^1$ ed elevata a **a**: $[L]^0\ [T]^0\ [M]^a$
la lunghezza l ha dimensioni $[L]^1\,[T]^0\,[M]^0$ ed elevata a **b**: $[L]^b\ [T]^0\ [M]^0$
l'accelerazione g ha dimensioni $[L]^1\,[T]^{-2}[M]^0$ ed elevata a **c**: $[L]^c\ [T]^{-2c}[M]^0$
Il prodotto di tali dimensioni deve essere pari a quelle di T: $[L]^0\ [T]^1\ [M]^0$.

Si ottiene pertanto il sistema: $\begin{cases} b + c = 0 \\ -2c = 1 \\ a = 0 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} a = 0 \\ b = 1/2 \\ c = -1/2 \end{cases}$ e quindi: $T = k\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

Il valore della costante k è 2π: si può ricavare a partire dall'equazione differenziale che descrive il moto del pendolo per piccole oscillazioni: $m\,l\,\ddot{\theta} = -m\,g\,\theta$ da cui $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{l}\theta = 0$ dove la pulsazione $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$.

• Consideriamo un elettrone di carica q e massa m posto all'interno di un condensatore piano (distanza d fra le armature) caricato con la tensione V. Se la particella lascia l'armatura negativa con velocità iniziale nulla, con quale velocità raggiungerà l'armatura positiva ?
Ipotizzando che sia $v = k\, q^a\, m^b\, V^c\, d^d$, costruiamo anche in questo caso una tabella (con una colonna in più rispetto al caso precedente: dobbiamo includere una unità di misura per le grandezze elettriche; scegliamo l'intensità di corrente I)

nota [5]		[L]	[T]	[M]	[I]
q	a	0	1	0	1
m	b	0	0	1	0
V	c	2	-3	1	-1
d	d	1	0	0	0
v		1	-1	0	0

Si ottiene il sistema: $\begin{cases} 2c + d = 1 \\ a - 3c = -1 \\ b + c = 0 \\ a - c = 0 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} a = 1/2 \\ b = -1/2 \\ c = 1/2 \\ d = 0 \end{cases}$ e quindi: $v = k\sqrt{\dfrac{qV}{m}}$.

Il valore della costante $k = \sqrt{2}$ si può ricavare applicando il principio della conservazione dell'energia meccanica: $q\,V = 1/2\ m\,v^2$.

• Nell'esempio precedente supponiamo che esista un campo di induzione magnetica B omogeneo e parallelo alle armature. A causa della forza di Lorentz l'elettrone curverà e potrebbe non raggiungere l'armatura positiva. Qual è il minimo valore di B per il quale la particella non raggiungerà l'armatura positiva?

[5] Le dimensioni della carica elettrica si ricavano dalla definizione I=dq/dt; quelle del potenziale si possono ricavare a partire dall'equazione base W = V I che esprime la potenza in funzione della tensione e della corrente.

Ipotizziamo $B = k\, q^a\, m^b\, V^c\, d^d$ e costruiamo la tabella:

		[L]	[T]	[M]	[I]
Q	a	0	1	0	1
M	b	0	0	1	0
V	c	2	-3	1	-1
D	d	1	0	0	0
B [6]		0	-2	1	-1

Col solito procedimento si ottiene: $B = \frac{k}{d}\sqrt{\frac{mV}{q}}$.

Il valore della costante $k = \sqrt{2}$ si può ricavare risolvendo le equazioni del moto (attenzione: non è un moto circolare perché il campo elettrico produce un'accelerazione lungo la direzione x perpendicolare alle armature): $\begin{cases} m\,\ddot{x} = \frac{qV}{d} - q\,B\,\dot{y} \\ m\,\ddot{y} = q\,B\,\dot{x} \end{cases}$

integrando la seconda equazione fra x = 0 e x = d si ha: $m\,\dot{y}(d) = q\,B\,d$.

Affinché B sia minimo la carica deve arrivare sull'armatura positiva con velocità nulla nella direzione dell'asse X e quindi $\begin{cases} \dot{x}(d) = 0 \\ \dot{y}(d) = v(d) \end{cases}$ da cui: $m\,v(d) = q\,B\,d$

e imponendo la conservazione dell'energia si ottiene che in x = d: $1/2\ m\,v(d)^2 = q\,V$.

[6] Le dimensioni di B possono ricavarsi, per esempio, a partire dalla seconda legge di Laplace: $\vec{F} = i\,\vec{\ell} \times \vec{B}$

ESERCIZI:

- 1.1) Il periodo di rotazione di T di un disco di raggio R e momento di inerzia I sospeso per il centro a un filo di lunghezza h e raggio r vale $T=\frac{2\pi}{r^2}\sqrt{\frac{2hI}{\pi G}}$
Quali sono le dimensioni di G in un sistema che utilizza come grandezze fondamentali lunghezza, tempo e massa ?

- 1.2) Sapendo che nell'equazione: $I\ddot{\theta}+\beta\dot{\theta}+c\theta = m\cos(\omega t-\varphi)$ **m** è il momento di una forza, **t** un tempo e $\boldsymbol{\theta}$ un angolo, determinare le dimensioni di **I**, $\boldsymbol{\beta}$, **c**, $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{\varphi}$**.**

- 1.3) In un sistema di unità di misura che utilizza come grandezze fisiche fondamentali velocità, forza e massa quali dimensioni ha il tempo ?

- 1.4) Quali sono le dimensioni della costante dielettrica nel vuoto in un sistema che utilizza come grandezze fondamentali lunghezza, tempo, massa, intensità di corrente ?

- 1.5) In un sistema di unità di misura che utilizza come grandezze fisiche fondamentali la superficie [S], l'accelerazione [a] e il calore [Q] che dimensioni ha la massa [M] ?

- 1.6) In un sistema di unità di misura che utilizza come grandezze fisiche fondamentali l'accelerazione [a], la velocità angolare [Ω] e la forza [F] che dimensioni ha il calore [Q] ?

- 1.7) Date le relazioni C=dQ/dV, I=dQ/dt e V= L dI/dt, quali sono le dimensioni di $\frac{1}{\sqrt{LC}}$?

- 1.8) Determinare le dimensioni di **v** e **g** nell'equazione di Bernoulli per il moto di un fluido incomprimibile sapendo che $\boldsymbol{\rho}$ è una densità di massa, **h** un'altezza e **p** una pressione:
$1/2\ \rho\ v^2 + \rho\ g\ h + p = \text{costante}$

- 1.9) La probabilità (quantità adimensionale) che la velocità di una molecola in un gas all'equilibrio termico sia compresa fra v e v+dv è data dall'equazione (Maxwelliana):
$dP = \alpha\ v^2 e^{-K v^2} dv$
Determinare le dimensioni di α e K.

- 1.10) Verificare dal punto di vista dimensionale la compatibilità della legge di stato dei gas perfetti PV=RT e della relazione (teoria cinetica dei gas) E_{cin}=3/2 K T con la definizione R = N K (N costante di Avogadro)

- 1.11) La densità di polarizzazione di un dielettrico (P) è per definizione pari al valore medio del momento di dipolo elettrico (prodotto di una carica per una lunghezza) moltiplicato per il numero di dipoli elettrici per unità di volume. È corretto che P abbia le stesse dimensioni di una densità di carica superficiale?

SOLUZIONI

1.1) $[G] = [M]\,[L]^{-1}\,[T]^{-2}$

1.2) $[I] = [M][L]^2$; $[\beta] = [M][L]^2[T]^{-1}$; $[c] = [M][L]^2[T]^{-2}$; $[\omega] = [T]^{-1}$; $[\varphi] = 1$

1.3) $[T] = [v]\,[M]\,[F]^{-1}$

1.4) $[L]^{-3}\,[t]^4\,[M]^{-1}\,[I]^2$

1.5) $[M] = \dfrac{[\text{energia}]}{[\text{velocità}]^2} = \dfrac{[Q]}{[a]^2[T]^2}$; da $[S]=[L]^2$ e $[a]=[L]\,[T]^{-2}$ -> $[T]=[a]^{-1/2}\,[S]^{1/4}$

->$[M] = \dfrac{[Q]}{[L]^2[T]^{-2}} = [S]^{-1/2}\,[a]^{-1}\,[Q]$

1.6) $[a] = [L]\,[T]^{-2}$; $[\Omega] = [T]^{-1}$ -> $[L] = [a]\,[\Omega]^{-2}$ -> $[Q] = [F]\,[L] = [a]\,[\Omega]^{-2}[F]$

1.7) $[T]^{-1}$

1.8) v è una velocità (quella del fluido), g un'accelerazione (di gravità)

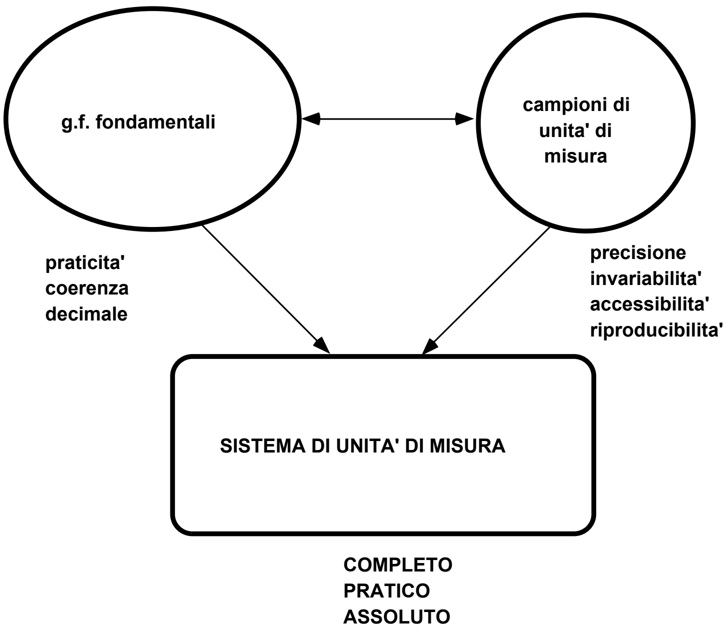
1.9) $[\alpha]=[L]^{-3}[T]^3$; $[K]=[L]^{-2}[T]^2$

1.11) Sì.

SISTEMI DI UNITÀ DI MISURA

Prima di operare con misure sui fenomeni fisici è importante decidere quale sistema di unità di misura adottare. Infatti, a seconda della scelta, variano non solo i valori numerici dei risultati ma a volte anche la forma delle equazioni che descrivono le leggi fisiche.

Un sistema di unità di misura è caratterizzato dalle grandezze fisiche scelte come fondamentali, dalle eventuali convenzioni di coordinazione e dai campioni di unità di misura.
Deve essere ispirato da criteri di praticità e deve risultare completo (deve consentire la misurazione di tutte le g.f.) e assoluto (le misure non devono variare da luogo a luogo e al trascorrere del tempo).
La praticità si riflette nella scelta delle g.f. fondamentali (p.es. si preferisce la lunghezza alla superficie o al volume), nell'adozione dei criteri di coerenza e del sistema decimale per i multipli e sottomultipli.
L'assolutezza del sistema è invece garantita dalla scelta dei campioni di unità di misura che devono risultare precisi (il valore della loro misura non deve variare da una misurazione all'altra) e invariabili nel tempo e nello spazio. Anche i campioni di unità di misura devono risultare pratici e quindi devo essere o accessibili (presso le opportune istituzioni Nazionali e/o Internazionali) o riproducibili in laboratorio.



Sistema Internazionale (S.I.) - In Italia legge del 1982

Il sistema di unità di misura che oggi meglio risponde a queste esigenze è il Sistema Internazionale (SI).

Il D.P.R. 12 agosto 1982 n. 802, specificando le norme per l'attuazione della direttiva CEE n. 80/181 relativa alle unità di misura, obbliga l'uso del SI.
Anche se adotteremo il SI è bene ricordare che molti testi, anche recenti, utilizzano sistemi di unità di misura differenti (spesso il vecchio M.K.S.A) ormai non più consentiti dalla legge.

Definizioni

Grandezza misurabile (grandezza fisica):
attributo di un fenomeno, corpo o sostanza che può essere distinto qualitativamente e determinato quantitativamente.
P.es.: lunghezza, tempo, massa, temperatura, resistenza elettrica.
Le grandezze che possono essere poste in ordine di grandezza relativo sono grandezze dello stesso tipo (omogenee); esse possono essere raggruppate per categorie:
P.es.: lavoro, calore, energia; spessore, circonferenza, lunghezza d'onda.

Grandezza fondamentale:
una delle grandezze che in un sistema di unità di misura sono convenzionalmente accettate come funzionalmente indipendenti dalle altre.
Nel SI alcune grandezze fondamentali sono lunghezza, tempo, massa, temperatura.
Per ogni grandezza fondamentale è necessario stabilire convenzionalmente un'unità di misura; ad ogni unità di misura deve corrispondere un campione di unità.

Grandezza derivata:
grandezza definita in un sistema di unità come funzione delle grandezze fondamentali di quel sistema.
P.es. nel SI la velocità è una grandezza derivata da lunghezza e tempo.

Dimensione di una grandezza:
espressione che rappresenta una grandezza di un sistema di unità come prodotto di potenze di fattori (detti dimensioni) che rappresentano le grandezze fondamentali di quel sistema.
P.es. nel SI la dimensione della forza è $[L][M][T]^{-2}$ e $[L]^2[M][T]^{-2}$ è la dimensione dell'energia, del calore, del momento di una forza.
Condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché una relazione fra grandezze fisiche sia corretta è che le dimensioni delle grandezze unite dalla relazione di uguaglianza o dalle operazioni di somma o sottrazione siano le stesse:
p.es.: $E = m\,g\,h + 1/2\,m\,v^2$; i 3 termini hanno le dimensioni $[L]^2[M][T]^{-2}$.
Gli argomenti di funzioni sviluppabili in serie di potenze (p.es. e^x, sin(x), log(x), sinh(x), ...) hanno sempre dimensione 1.

Grandezza di dimensione 1 (adimensionale, numero puro):
per esempio: angolo piano, angolo solido, indice di rifrazione, costante dielettrica relativa, numero di Mach.

Unità di misura:
quantità particolare che convenzionalmente è stata adottata come la quantità alla quale vanno comparate le altre grandezze dello stesso tipo per esprimerne la grandezza relativa.

Simbolo di una unità di misura:
segno convenzionale che designa una unità di misura; p.es.: m per metro, K per kelvin, A per ampere, V per volt, W per watt.
I nomi di tutte le unità di misura sono nomi comuni privi di accento e vanno scritti con l'iniziale minuscola; sono invariabili al plurale con l'eccezione di: metro, chilogrammo, secondo, candela, mole, radiante e steradiante.
I simboli delle unità vanno scritti con la maiuscola quando il nome dell'unità è derivato da un nome proprio; minuscola negli altri casi.

Quando l'unità di misura non è accompagnata dal valore numerico deve essere scritta per esteso e non con il simbolo.
Indipendentemente dal testo in cui sono inseriti, i simboli vanno scritti in caratteri verticali lasciando uno spazio fra il valore e l'unità (p.es. 5,4 mA e non 5,4mA o *5,4 mA*); non devono mai essere seguiti dal punto di abbreviazione.

Sistema di unità di misura:
insieme di unità fondamentali e unità derivate definito seguendo le regole assegnate per un sistema di grandezze assegnato; per esempio: c.g.s., M.K.S.A., S.I.
Un sistema di unità è coerente se tutte le unità derivate sono coerenti; cioè sono espresse come prodotto di potenze di unità fondamentali.
P.es:1 Hz = 1 s^{-1}; 1 N = 1 kg m s^{-2}; 1 Pa = 1 kg m^{-1} s^{-2}; 1 J = 1 kg m^2 s^{-2}

Campione (di unità di misura):
materiale o sistema di misura destinato a definire, realizzare, conservare o riprodurre una unità di grandezza per servire da riferimento.
Non appena la tecnologia consente di utilizzare un fenomeno in modo più stabile e riproducibile che in precedenza, si cerca di utilizzarlo per definire un nuovo campione di unità di misura (per un nuovo sistema di unità di misura). Il suo valore, per ovvi motivi di praticità, non dovrà discostarsi dalla vecchia unità di misura per più della sua riproducibilità.

Campione (primario e secondario):
il campione (primario) è designato o largamente accettato come avente le più alte qualità metrologiche; il suo valore è stabilito senza riferimento ad altri campioni della stessa specie; può riferirsi indifferentemente a grandezze fondamentali o derivate.
Il campione secondario è un campione il cui valore è determinato per confronto col campione primario della stessa grandezza.

Tracciabilità:
proprietà di un campione o del risultato di una misura di essere rapportabile ai campioni locali, nazionali o internazionali mediante una catena ininterrotta di confronti effettuati con incertezze determinate.
I campioni secondari e/o quelli ottenuti a partire da questi ultimi non hanno lo stesso grado di riproducibilità del campione primario: si pensi al campione di lunghezza che da un lato richiede un orologio atomico per sfruttare la definizione di "metro campione" e dall'altro, per poter essere utilizzato p.es. per la graduazione di un regolo, deve consentire la segnatura di due tacche a distanza di un metro ed è quindi soggetto a dilatazioni termiche, vibrazioni, problemi di planarità e parallelismo, etc. Del resto i campioni primari vengono utilizzati rarissimamente: la quasi totalità delle misurazioni tecniche e scientifiche non richiede quella riproducibilità garantita solo dal campione primario.

Sistema Internazionale di unità di misura SI: norma CNR-UNI 10003

sistema coerente basato su 7 unità fondamentali:

grandezza [simbolo[7]]	**unità**	**simbolo dell'unità**
lunghezza [L]	metro	m
massa [M]	chilogrammo	kg
tempo [T]	secondo	s
corrente elettrica [I]	ampere	A
temperatura termodinamica [θ]	kelvin	K
quantità di sostanza	mole	mol
intensità luminosa	candela	cd

Campioni delle unità di misura del SI:

lunghezza: metro (m)

Lunghezza del tragitto compiuto dalla luce nel vuoto in un intervallo di 1/299 792 458 di secondo

Prima dell'attuale definizione (XVII Conferenza Generale Pesi e Misure –1983) che è parte integrante del S.I. il metro ha avuto le seguenti definizioni:

- **quarantamilionesima parte del meridiano terrestre** (più precisamente la decimilionesima parte della distanza fra il polo della Terra e l'equatore lungo il meridiano passante per Parigi) - la definizione di Laplace-Lagrange risale al 1791)
- **distanza fra due incisioni su di una sbarra di platino-iridio** (conservata nel Bureau International des Poids et Mesures a Sèvres, presso Parigi). La definizione, adottata nel settembre 1889 dalla Prima Conferenza Internazionale di Pesi e Misure, scaturì dalla necessità di fare riferimento a campioni concreti. La riproducibilità di questo campione era di 0,2 μm/m = 2×10^{-7}
- **lunghezza pari a 1 650 763,73 lunghezze d'onda nel vuoto della riga rosso-arancio del kripton 86.** La definizione (XI CGPM - 1960) è parte integrante del vecchio sistema M.K.S.A (La riproducibilità di questo campione era di 1 nm/m = 10^{-9})

La definizione del metro campione di lunghezza si basa sulla costanza della velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto. Nel S.I. tale velocità viene assunta per definizione c = 299 792 458 m/s. La riproducibilità del campione di lunghezza coincide, quindi, con quella del campione del secondo $\Delta L/(L_{metro}) = \Delta T/(T_{secondo}) = 10^{-12}$

massa: chilogrammo (kg)

Massa del prototipo internazionale conservato al Pavillon de Breteuil (Sèvres - Francia)

La definizione (III CGPM – 1901) si riferisce a un cilindro di platino – iridio (90%-10%) alto circa 39 mm e di diametro circa 39 mm. Per il suo utilizzo (confronto con prototipi di campioni

[7] Per i simboli delle grandezze fisiche non esiste una convenzione; siete liberi di scegliere la notazione che preferite facendo però molta attenzione: ad esempio con [L] si può indicare una lunghezza ma anche lavoro, momento angolare, induttanza ...

secondari) viene impiegata una bilancia (della portata di un chilogrammo) sensibile ai 10 μg che garantisce una riproducibilità $\Delta M/(M_{chilogrammo})$ = 10 μg/1 kg = 10^{-8}.
Quello di massa è il campione di unità di misura del S.I. più antico. Si attende una minore incertezza nella determinazione del numero di Avogadro (N = 6,022 045 x 10^{23} mol^{-1}) per definire un nuovo campione di massa.

tempo: secondo (s)

Durata di 9 192 631 770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione fra i due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo del cesio 133

Prima dell'attuale definizione del secondo (XIII CGPM – 1967) le precedenti si basavano sulla periodicità del moto terrestre:

- **86400-esima parte del giorno solare medio**, cioè della media sulla base di un anno del **giorno solare**, inteso come intervallo di tempo che intercorre tra due successivi passaggi del Sole sullo stesso meridiano (86 400 = 24 ore/giorno x 60 min/ora x 60 s/min)
- **secondo dell'effemeride** è 1/31 556 925,974 dell'**anno tropico 1900** (intervallo di tempo fra due **equinozi di primavera**).

  Le due unità di misura del secondo erano coincidenti nel 1900, ma ora non lo sono più, a causa delle anomalie nella velocità di rotazione della Terra.

  Successivamente la definizione si basò sull'**orologio ad ammoniaca** che sfrutta la costanza della frequenza delle vibrazioni dell'atomo[8] di azoto rispetto al piano degli atomi di idrogeno (23,87 GHz).

La riproducibilità del campione di secondo è $\Delta T/(T_{secondo}) = 10^{-12}$.

temperatura termodinamica: kelvin (K)

Frazione 1/273,16 della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua

(XIII CGPM – 1967)
Il punto termodinamico dove coesistono le tre fasi solida, liquida e gassosa dell'acqua è alla temperatura di –0,01 °C e alla pressione di 4,58 mm_{Hg}.
Con questa definizione l'acqua distillata solidifica, alla pressione atmosferica, a 0,01 K.
La riproducibilità del campione è $\Delta\theta/(\theta_{kelvin}) = 2 \times 10^{-7}$.

intensità di corrente elettrica: ampere (A)

Intensità di una corrente elettrica costante che, percorrendo due conduttori rettilinei, paralleli, di lunghezza infinita, di sezione circolare trascurabile, posti alla distanza di un metro l'uno dall'altro nel vuoto, produrrebbe fra questi conduttori una forza pari a 2x10^{-7} N su ogni metro di lunghezza

(IX CGPM- 1948)
La definizione è astratta. Con le opportune precauzioni è tuttavia possibile approssimare sufficientemente le richieste di conduttori rettilinei, paralleli, di lunghezza infinita e sezione nulla della definizione: il campione è riproducibile a $\Delta I/(I_{kampere}) = 4 \times 10^{-6}$. Per altre grandezze elettriche (non fondamentali) sono disponibili campioni più riproducibili.

[8] Per questo motivo questi strumenti vengono detti orologi atomici: il loro periodo di oscillazione è legato ad una particolare vibrazione di un sistema atomico.

quantità di materia: mole (mol)

Quantità di materia di un sistema che contiene tante entità elementari quanti sono gli atomi in 0,012 kg di carbonio 12. Le entità elementari debbono essere specificate e possono essere atomi, molecole, ioni, elettroni, altre particelle, ovvero gruppi specificati di tali particelle

(XIV CGPM – 1971)

intensità luminosa: candela (cd)

Intensità luminosa, in una data direzione, di una sorgente che emette una radiazione monocromatica di frequenza 540 x 10^{12} Hz e la cui intensità energetica in tale direzione è 1/683W/sr

(XVI CGPM – 1979)
La frequenza di 540 THz corrisponde, nel vuoto, alla lunghezza d'onda λ = 555 nm (colore giallo) che è al massimo della sensibilità spettrale dell'occhio umano.

Unità derivate:

alcune unità derivate hanno nomi e simboli speciali; ad esempio:

grandezza derivata	unità di misura	simbolo	equivalenza
angolo piano	radiante	rad	1 rad = 1 m/m
angolo solido	steradiante	sr	1 sr = 1 m^2/m^2
frequenza	hertz	Hz	1 Hz = 1/s
forza	newton	N	1 N = 1 kg m/s^2
pressione	pascal	Pa	1 Pa = 1 N/m^2
energia, lavoro, calore	joule [9]	J	1 J = 1 N m
potenza	watt	W	1 W = 1 J/s
carica elettrica	coulomb	C	1 C = 1 A s
potenziale, f.e.m.	volt	V	1 V = 1 J/C
resistenza elettrica	ohm	Ω	1 Ω = 1 V/A
flusso magnetico	weber	Wb	1 Wb= 1 V s
induzione magnetica	tesla	T	1 T = 1 Wb/m^2
capacità elettrica	farad	F	1 F = 1 C/V
induttanza	henry	H	1 H = 1 Wb/A
flusso luminoso	lumen	lm	1 lm = 1 cd sr
illuminamento	lux	lx	1 lx = 1 lm/m^2

Prefissi per indicare multipli e sottomultipli:

femto	f	10^{-15}	peta	P	10^{+15}
pico	p	10^{-12}	tera	T	10^{+12}
nano	n	10^{-9}	giga	G	10^{+9}
micro	µ	10^{-6}	mega	M	10^{+6}
milli	m	10^{-3}	chilo	k	10^{+3}

[9] Si raccomanda la pronuncia "giul"

Notazioni:

Seguendo lo stile dei documenti I.S.O. per marcare la parte decimale di un numero viene utilizzata la virgola e non il punto.
Non può essere usato più di un prefisso.
Per le misure di massa i multipli e sottomultipli vanno riferiti al grammo e non al chilogrammo: mg per milligrammo e non µkg.
Occorre prestare attenzione nei casi in cui un prefisso può essere confuso con una unità; ad esempio:
mK = millikelvin; Km = kelvin x metro; km = chilometro; MK= megakelvin.
È opportuno scegliere i prefissi in modo da ottenere valori compresi fra 0,1 e 1 000.
In una tabella va usato un solo prefisso per colonna anche se i valori escono dall'intervallo compreso fra 0,1 e 1 000.

Unità non SI:

minuto (min) ora (h) giorno (d)
1 miglio nautico internazionale = 1 852 m
1 miglionautico/h = 1 knot = 0,514 444 m/s 1 km/h = 1/3,6 m/s
1 bar = 10^5 Pa
1 kWh = 3,6 MJ
1 Ah = 3,6 kC
1 t (tonnellata)= 1 000 kg

Unità non SI da evitare (anche se ancora di uso comune)

1" (1 inch) = 25,4 mm 1 ft = 12" = 0,304 8 m 1 yd = 3 ft = 0,914 4 m
1 kg_f (chilogrammo forza) = 1 kg_p (chilogrammo peso) = 9,806 65 N
1 atm (atmosfera standard) = 101,325 kPa = 1,013 25 bar
1 at (atmosfera tecnica) = 98,066 5 kPa = 0,980 665 bar
1 mmHg = 1 Torr = 1,333 22 mbar = 133,322 Pa
1 cal = 4,186 8 J 1 Cal = 4,186 8 kJ
1 HP = 735,498 75 W 1 CV = 75 kgm/s 1 kgm/s = 9,806 65 W

Sistemi di unità di misura diversi dal S.I.

c.g.s. meccanico tecnico

<u>sistema non coerente né completo</u>

5 grandezze fondamentali:

LUNGHEZZA	centimetro	cm
MASSA	grammo	g
TEMPO	secondo	sec[10]
TEMPERATURA	grado Celsius	°C [11]
CALORE	caloria	cal [12]

c.g.s. elettrostatico

<u>sistema non coerente</u>

3 grandezze fondamentali:

LUNGHEZZA	centimetro	cm
MASSA	grammo	g
TEMPO	secondo	sec

Si definisce la carica elettrica come grandezza derivata dalla legge di Coulomb $F = k\frac{q_1\, q_2}{r^2}$ e dalla convenzione di coordinazione che nel vuoto pone k = 1 e adimensionale.

c.g.s. elettromagnetico

<u>sistema non coerente</u>

3 grandezze fondamentali:

LUNGHEZZA	centimetro	cm
MASSA	grammo	g
TEMPO	secondo	sec

Si definisce la corrente elettrica come grandezza derivata dalla legge di attrazione o repulsione tra due fili paralleli $F = k\, I_1\, I_2\, \frac{l}{d}$ e dalla convenzione di coordinazione che nel vuoto pone k = 2 e adimensionale.

sistema tecnico (S. T.)

<u>sistema non coerente e non assoluto</u>

5 grandezze fondamentali:

LUNGHEZZA	metro	m
TEMPO	secondo	sec
PESO [13]	chilogrammo peso	kg_p
TEMPERATURA	grado Celsius	°C
CALORE	Caloria	Cal [14]

---

[10] **notare il simbolo "sec" al posto di "s" del Sistema Internazionale**

[11] °C: un centesimo dell'intervallo di temperatura compreso fra la temperatura di solidificazione (0 °C) e quella di ebollizione (100 °C) dell'acqua a 1 atmosfera e al livello del mare.
La differenza di temperatura di 1 K (kelvin) coincide con 1 °C (per le differenze di temperatura il SI tollera l'unità "grado centigrado")

[12] cal: quantità di calore necessaria per innalzare la temperatura di 1 g di acqua da 14,5 °C a 15,5 °C

[13] la massa è una grandezza derivata

[14] Cal: quantità di calore necessaria per innalzare la temperatura di 1 kg di acqua da 14,5 °C a 15,5 °C

FATTORI DI RAGGUAGLIO

Supponiamo di avere ottenuto la misura di una grandezza G in un sistema di unità di misura iniziale mediante confronto con l'unità $[U_i]$ e di voler trasformare la misura in quella che si otterrebbe adottando il sistema di unità finale con l'unità $[U_f]$.

Poiché, ovviamente, $G = g_i\,[U_i] = g_f\,[U_f]$, si ottiene $g_f = g_i\,[U_i]/\,[U_f]$.
Quindi per trasformare il risultato è sufficiente moltiplicare il valore numerico della misura g_i per il fattore di ragguaglio $\tau = [U_i]/\,[U_f]$:

$$\boxed{g_f = \tau\ g_i}$$

Esempio: a quanti metri al secondo corrispondono 72 km/h ?

In questo caso $\tau = \dfrac{\dfrac{1\,\text{km}}{1\,\text{h}}}{\dfrac{1\,\text{m}}{1\,\text{s}}} = \dfrac{\dfrac{1000\,\text{m}}{3600\,\text{s}}}{\dfrac{1\,\text{m}}{1\,\text{s}}} = \dfrac{1}{3{,}6}$ e quindi il risultato è 72 x 1/3,6 = 20 m/s.

Alternativamente si può sostituire ad ogni simbolo della vecchia unità di misura il simbolo della nuova unità preceduto dal fattore numerico necessario per la conversione:

$$72\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 72\ \frac{10^3\,\text{m}}{3600\ \text{s}} = 72 \text{ x } \frac{1}{3{,}6}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 29 \text{ m/s}$$

ESERCIZI:

- 2.1) Ricordando la legge di Stevino P = ρ g h, a quanti pascal corrisponde la pressione esercitata da una colonna di 78 cm di Hg (ρ = 13,6 unità c.g.s.)?

- 2.2) La grandezza T varia con la distanza x secondo la relazione:

$T(x) = Te + (Ts - Te)\,e^{-\sqrt{\frac{2a}{R}}\,x}$; sapendo che [x] = [R], in quali unità si misura **a** nel S.I.?

- 2.3) Data l'equazione $V(t) = \frac{A}{C} e^{-KRt}$, quali sono le dimensioni nel S.I. di **A** e **K** se V è una tensione elettrica e C, R e t si misurano rispettivamente in farad, Ω e s ?

- 2.4) Quali sono le dimensioni del calore specifico nel S.I. ? Qual è la sua unità di misura ?

- 2.5) L'andamento spaziale e temporale della temperatura di un corpo di densità ρ è descritto dalla relazione $T(x,t) = \frac{K_1}{\rho} e^{-K_2 x} \cos(K_3 t)$.Quali sono le unità di misura di K_1, K_2 e K_3 nel S.I.?

- 2.6) Il modulo di Young (E) e quello di scorrimento (G) hanno le stesse unità di misura e sono legati dalla relazione E = 2 (1+σ) G. Quali sono le dimensioni di σ (modulo di Poisson) nel sistema tecnico?

- 2.7) Quanto vale nel S.I. 1 kWh (chilowattora) ? e 1 ampere-ora ?

- 2.8) Data l'equazione $V(t) = \frac{A}{C}\cos(\gamma \frac{1}{LC} t)$ quali sono le dimensioni nel S.I. di **A** e **γ** se V, C, L e t si misurano in V, F, H, s ?

- 2.9) L'energia potenziale di un corpo (di massa 7 g) che cade nel vuoto da una certa altezza è completamente trasformata in calore: 0,35 J. Con quale velocità (km/min) giunge al suolo ?

- 2.10) L'energia cinetica di un corpo che cade nel vuoto da 20 cm di altezza è completamente trasformata in calore:10^{-7} kWh. Qual è la massa in grammi del corpo ?

- 2.11) Quali sono, nel SI le dimensioni delle quantità RC, L/R e LC (R = resistenza, C = capacità, L = induttanza) ?

SOLUZIONI:

2.1) P[c.g.s.]=13,6 x 981 x 78 = 10 396 [c.g.s.]

$$\tau = \frac{{}^{g}\!/_{cm^3}\ {}^{cm}\!/_{s^2}\ cm}{{}^{kg}\!/_{m^3}\ {}^{m}\!/_{s^2}\ m} = \frac{{}^{10^{-3}kg}\!/_{(10^{-2}m)^3}\ {}^{10^{-2}m}\!/_{s^2}\ 10^{-2}\,m}{{}^{kg}\!/_{m^3}\ {}^{m}\!/_{s^2}\ m} = {}^{10^{-3}}\!/_{10^{-6}}\ {}^{10^{-2}}\!/_{1}\ 10^{-2} = 10;$$

quindi P = 10 * 10 396 Pa = 103,96 kPa
Diversamente, esprimendo i 3 termini nelle unità base del S.I., si ottiene direttamente
P = (13,6 x 10^3 kg/m^3) (9,81 m/s^2) (78 x 10^{-2} m) = 103,96 kPa

2.2) $[a]^{1/2}[R]^{-1/2}[x]=1$ cioè $[a]=[R][x]^{-2}=[L]^{-1}$-> m^{-1}

2.3) [A] = [I] [T]; $[K] = [R]^{-1}[T]^{-1}=[\mathcal{L}]^{-1}$ ($\mathcal{L}$ = induttanza)

2.4) $[c] = [L]^2\,[T]^{-2}\,[\theta]^{-1}$ unità: (J/kg)/K

2.5) rispettivamente: K kg/m^3; m^{-1}; rad/s

2.6) è adimensionale

2.7) 3,6 MJ; 3,6 kC

2.8) A si misura in volt x farad = coulomb -> [A] = [I] [T];

γ si misura in farad x henry / secondo = secondi -> $[\gamma]$ = [T]

2.9) $Q = m\,g\,h = \frac{1}{2} m\,v^2$ -> $v = \sqrt{\frac{2Q}{m}} = \sqrt{\frac{0{,}7\ J}{7x10^{-3}\,kg}} = 10$ m/s

$$\tau = \frac{\frac{1m}{1s}}{\frac{10^3\,m}{60s}} = 6 \text{ x } 10^{-2} \text{ -> } v = 0{,}6 \text{ km/min}$$

2.10) $\frac{1}{2} m\,v^2 = m\,g\,h = Q$ -> $m = \frac{Q}{gh} = 5 \text{ x } 10^{-10}\ \frac{kWh}{m/s^2 cm}$.

$$\tau = \frac{\frac{10^3 x3{,}6x10^3}{1x10^{-2}}\,kg}{10^{-3}\,kg} = 3{,}6 \text{ x } 10^{11} \text{ -> } m = 180 \text{ g}$$

2.11) [RC]=[L/R]=[T]; [LC]=$[T]^2$

TEORIA DELLA MISURA

Illustriamo alcuni concetti della teoria della misura con un esempio[15].

Si supponga di voler determinare la profondità di un pozzo gettando in esso un sasso[16].
Per ottenere una misura diretta della profondità dovremmo eseguire una serie di operazioni che porti al confronto di questa grandezza con l'unità di misura ad essa omogenea[17]. Alternativamente si può pensare a una misura derivata in cui si misura il tempo impiegato dal sasso per giungere in fondo al pozzo.

Seguiamo questa seconda strada: possiamo misurare con un cronometro[18] il tempo necessario affinché il sasso, lasciato cadere dall'imboccatura del pozzo, raggiunga il fondo. A questo punto abbiamo bisogno di una relazione fra la profondità del pozzo e il tempo impiegato dal sasso per raggiungerne il fondo. Questa relazione deve essere nota con almeno la stessa accuratezza che richiediamo alla nostra misura.

Dobbiamo quindi creare un modello della realtà, analizzarlo dal punto di vista delle leggi fisiche e infine tradurlo in relazioni matematiche.
Una prima schematizzazione potrebbe consistere nel considerare la caduta del sasso come se avvenisse nel vuoto. In questo caso dall'equazione del moto si otterrebbe:

$$h = \tfrac{1}{2} g\, t^2 \qquad (1)$$

in cui "h" rappresenta la profondità incognita del pozzo, "$g = 9{,}8\ m/s^2$" l'accelerazione di gravità e "t" il tempo misurato direttamente con un cronometro.

La misurazione si svolgerebbe nel seguente modo[19]: il misuratore lascia cadere il sasso mentre fa partire il cronometro; quando sente il tonfo del sasso nell'acqua arresta il cronometro; l'indicazione del cronometro rappresenterà il tempo "t" da introdurre nella relazione (1).

Ci aspettiamo di trovare un solo valore[20] dal quale ricavare esattamente la profondità cercata? Se ripetessimo più volte la misurazione otterremmo una serie di misure di tempo simili tra loro ma non coincidenti. Ciò può essere dovuto a diversi motivi:

- non perfetto sincronismo fra il momento del rilascio del sasso e l'inizio del conteggio da parte del cronometro dovuto al ritardo dei riflessi del misuratore
- non perfetto sincronismo fra il momento in cui viene percepito il tonfo del sasso e l'istante in cui viene arrestato il cronometro
- velocità iniziale del sasso non nulla.

---

15 L'esempio ha validità puramente didattica. All'interno di questo corso la fase preparatoria delle misurazioni da svolgere in laboratorio non viene delegata allo studente. È però istruttivo e consigliato provare ad immaginare alcuni esempi di misurazione ed analizzarli nei termini descritti in queste note

16 La profondità del pozzo è il **misurando.** Stiamo definendo il **metodo di misurazione**: lanciamo un sasso (misura derivata) anziché adoperare un regolo (misura diretta)

17 Dovendo adottare il Sistema Internazionale, l'unità di misura della profondità (omogenea ad una lunghezza) è il metro. Ovviamente non ricorreremmo al confronto diretto col campione (cosa peraltro impossibile poiché in questo caso si tratta di una definizione) ma con un regolo che riporti delle incisioni (tacche) la cui distanza è determinata a partire dalla definizione del campione primario o più realisticamente da un campione secondario.

18 Il funzionamento del cronometro si basa su un oscillatore il cui periodo è in relazione nota con il campione di unità di misura del tempo.

19 Stiamo definendo la **procedura di misurazione**

20 Tale valore è detto **valore vero**. Poiché la definizione del misurando non può esssere infinitamente precisa, possono esistere più valori veri.

Questo tipo di cause porta a valori diversi fra una misura e la successiva; esse producono effetti di piccola entità che però non sono né riproducibili, né prevedibili perché variano casualmente. Vengono chiamate **errori casuali**.

Gli errori[21] sono la differenza fra il risultato di una misura e il valore vero cercato.

Per eliminare questa non riproducibilità si può agire in tre direzioni a seconda del risultato che si vuole ottenere:
- se non è importante distinguere, p.es., fra una profondità di 10 metri e una di 11 metri si può utilizzare un cronometro in grado di apprezzare solo i decimi di secondo. La scarsa sensibilità dello strumento maschererà l'effetto degli errori casuali
- se è possibile eseguire molte misure nelle stesse condizioni si possono utilizzare metodi statistici[22] per ridurre l'effetto degli errori casuali
- se si possono effettuare solo poche misurazioni, o al limite una sola, è necessario cambiare strumentazione[23], p.es. si può utilizzare un cronometro elettronico attivato dallo sblocco di un elettromagnete che lascia cadere il sasso con velocità nulla e si arresta quando il suono del tonfo arriva a un microfono.

È però illusorio pensare di poter eliminare del tutto gli errori casuali modificando la strumentazione: il cronometro, per quanto sensibile, non sarà mai in grado di apprezzare intervalli temporali inferiori al periodo del suo oscillatore interno, i dispositivi elettromeccanici risentono delle vibrazioni, la smagnetizzazione non è istantanea, i dispositivi elettronici sono disturbati dai campi elettromagnetici , etc.

La presenza degli errori casuali viene facilmente evidenziata ripetendo più volte la misurazione nelle stesse condizioni: se la sensibilità della strumentazione lo consente, si otterranno valori non coincidenti fra loro; lo scarto fra i valori delle varie misure è indice dell'entità degli errori casuali presenti nella misurazione.

Esiste però un'altra serie di cause che possono alterare il risultato della misura e produrre valori che si discostano da quello teorico:

- la formula (1) non considera l'attrito con l'aria
- non si tiene conto della velocità finita della propagazione del suono
- il cronometro può anticipare o ritardare

Le prime due cause conducono a misure di tempo superiori a quelle che si otterrebbero se la (1) descrivesse correttamente il fenomeno; la terza produrrebbe risultati maggiori o minori di quelli corretti a seconda della disfunzione dello strumento. Queste cause appartengono però a una categoria diversa da quella degli errori casuali: l'entità e il verso della variazione rimangono inalterati fra una misura e la successiva; si parla in questo caso di **errori sistematici**.

Contrariamente agli errori casuali, quelli sistematici possono, almeno in linea teorica, essere eliminati cambiando la strumentazione e/o il metodo di misura se questo altera i risultati delle misure o apportando correzioni numeriche al risultato ottenuto. Purtroppo non sono di facile individuazione proprio perché **non si evidenziano ripetendo la misurazione nelle stesse condizioni**. In questo caso per rivelarne la presenza occorre o studiare più a fondo il fenomeno per averne un modello e quindi una rappresentazione matematica più accurata, oppure si deve ripetere

[21] Nel campo della teoria della misura la parola "errore" non ha una connotazione negativa non essendo sinonimo, ad esempio, di "sbaglio".

[22] Il più noto consiste nel calcolare la media aritmetica della serie di risultati: i valori in eccesso tenderanno a compensarsi con quelli in difetto riducendo l'effetto degli errori casuali. Nel seguito del corso approfondiremo questa metodologia

[23] In questo caso variano anche la definizione del misurando, il metodo di misurazione e la procedura della misurazione

la misurazione in condizioni diverse, p.es. cambiando lo sperimentatore o la strumentazione o il principio fisico sul quale si basa la misura, etc.

Non si deve pensare che la distinzione fra errori casuali ed errori sistematici sia così netta. Ad esempio nell'azionare il cronometro in corrispondenza del verificarsi di un qualche evento, a causa della lentezza dei nostri riflessi, l'azione avverrà sempre in ritardo (errore sistematico) ma varierà anche leggermente da una prova alla successiva (errore casuale).

Data l'impossibilità di conoscere i valori veri (occorrerebbe effettuare delle misure senza errore ...) il concetto di errore è qualitativo; nell'elaborazione dei risultati di misurazioni si ricorrerà alle incertezze, quantità statistiche descrivibili in modo oggettivo.

DEFINIZIONI

Il *Comité International des Poids et Mesures* (**CIPM**), la più alta autorità mondiale in metrologia ha chiesto al *Bureau International des Poids et Mesures* (**BIPM**) di produrre una procedura accettata a livello internazionale per esprimere l'incertezza delle misure [24].

Tale compito è stato istruito dall'*International Organization for Standardization* (**ISO**) che meglio rappresenta le necessità delle industrie e del commercio e dalle organizzazioni che partecipano ai lavori dell'ISO: l'*International Electrotechnical Commission* (**IEC**) partner dell'ISO nella standardizzazione mondiale; il CIPM e l'*Organisation Internationale de Metrologie Légale* (**OIML**) organizzazioni mondiali nella metrologia; l'*International Union of Pure and Applied Chemistry* (**IUPAC**), l'*International Union of Pure and Applied Physics* (**IUPAP**) e l'*International Federation of Clinical Chemistry* (**IFCC**).

Seguono alcune note e definizioni, ricavate in gran parte dalle norme DIN, che sono state adattate ai contenuti del corso.

MISURAZIONE E MISURA

Misurazione:

insieme di operazioni che portano alla determinazione del valore del **misurando**, cioè il valore della grandezza fisica da misurare. Una misurazione inizia quindi con la specificazione appropriata del misurando, del **metodo di misurazione** e della **procedura di misurazione**.

Misura:

valore del misurando ottenuto in seguito a una misurazione. Essa è espressa come una unità di misura moltiplicata per un numero:

---

[24] Cosí come l'uso dell'*International System of Units* (**SI**) ha portato alla coerenza in tutte le misurazioni tecniche e scientifiche, in quest'epoca di mercato globale occorre un consenso mondiale sulla valutazione ed espressione dell'incertezza affinché sia possibile confrontare misure effettuate in nazioni diverse.

p.es. : lunghezza di una sbarra: 5,34 m; massa di un corpo: 0,152 kg; quantità di sostanza di un campione di acqua: 0,012 mol
I valori possono essere positivi, negativi o zero.
I valori di grandezze di dimensione 1 sono generalmente espressi come numeri puri (p.es. un'eccezione: 0,17 sr).
L'unità di misura deve essere sempre espressa in quanto parte integrante della misura.

Definizione del misurando:

il misurando deve essere definito con sufficiente completezza, rispetto all'accuratezza richiesta, affinché per tutti gli scopi pratici il valore associato con la sua misurazione sia unico.
Se, come esempio, la lunghezza di una sbarra di acciaio lunga nominalmente 1 m deve essere determinata con l'accuratezza di 1 µm, occorre che vengano specificate sia la temperatura che la pressione; se l'accuratezza richiesta è 1 mm non è necessario esprimere tali condizioni di misura.

Valore vero:

valore consistente con la definizione di una particolare grandezza data.
Questo è il valore si otterrebbe da una misurazione perfetta; pertanto i valori veri non sono determinabili.
Possono esserci più valori veri consistenti con una particolare definizione se questa non è sufficientemente dettagliata rispetto all'accuratezza della misurazione.

Metodo di misurazione:

può essere diretto se il valore del misurando è ottenuto mediante l'uso di uno strumento atto alla misurazione della grandezza fisica del misurando; è indiretto se il risultato è espresso in termini dei valori di altre grandezze essendo nota la relazione fra queste e il misurando.
Molti fenomeni fisici possono essere utilizzati in una misurazione; p.es. per misurare lunghezze si possono utilizzare: interferenza luminosa, variazione di capacità elettrica; per temperature: la dilatazione termica, l'effetto termoelettrico, la variazione di resistenza elettrica; per la forza: la deformazione elastica, l'accelerazione; per l'intensità di corrente: l'effetto Joule, effetti elettromagnetici.

Risultato di una misurazione:

valore attribuito al misurando in seguito a una misurazione. Esso è solo un'approssimazione o stima del valore del misurando ed è quindi completo solo quando venga accompagnato dall'incertezza di quella stima.
Riportando il risultato di una misurazione deve essere chiaro se è stata o meno effettuata una correzione per errori sistematici e se è stata eseguita una media aritmetica di più valori.
In molti casi il risultato di una misurazione è determinato da una serie di osservazioni ottenute in condizioni di ripetibilità. Eventuali variazioni dei risultati di osservazioni ripetute vengono attribuite al fatto che sono variate le grandezze influenti.

ERRORI, EFFETTI E CORREZIONI[25]

Errori di misura e loro cause:

L'errore è il risultato di una misurazione meno un valore vero del misurando. Esso è un concetto idealizzato perché gli errori non possono essere conosciuti esattamente in quanto non sono noti i valori veri; in pratica si usa al suo posto un valore convenzionale che è la stima dell'incertezza.

Ogni valore misurato è influenzato da imperfezioni dello strumento, del metodo di misura, dell'oggetto cui appartiene il misurando, dell'ambiente e dell'osservatore; queste influenze possono anche variare nel tempo. Infine ci possono essere sbagli commessi dall'osservatore inesperto che si supporranno inesistenti (ma gli studenti sono per definizione degli inesperti in questo campo a meno che non abbiano precedentemente acquisito esperienza nel campo delle misurazioni).

Esistono molte cause possibili dell'errore di una misurazione:
- definizione incompleta del misurando
- realizzazione imperfetta della definizione del misurando
- insieme di dati misurati non rappresentativo del misurando
- conoscenza inadeguata delle condizioni ambientali o dei loro effetti sulla misurazione
- valutazione soggettiva nella lettura di strumenti analogici
- risoluzione della strumentazione insufficiente
- valori inesatti delle costanti e dei parametri ottenuti da sorgenti esterne
- assunzioni ed approssimazioni utilizzate
- variazioni delle osservazioni ripetute non identificate

L'errore viene scomposto in una componente casuale e una sistematica.

Errori casuali

L'errore casuale è pari all'errore meno l'errore sistematico. Il suo valore non può essere conosciuto esattamente perché non è noto il valore vero.

Gli errori casuali provengono da impredicibili variazioni temporali e spaziali delle grandezze influenti. Sebbene non sia possibile compensare completamente gli errori causali, il loro effetto può essere ridotto aumentando il numero di osservazioni e calcolando la media aritmetica di un numero sufficientemente elevato di misure: l'errore casuale è il risultato di una misurazione meno la media che si potrebbe ottenere da un numero infinito di misurazione del misurando sotto condizioni di ripetibilità.

La deviazione standard sperimentale della media aritmetica di una serie di misurazioni non è l'errore casuale della media ma una misura dell'incertezza della media dovuta ad effetti casuali.

[25] Il concetto di incertezza come attributo quantificabile è stato introdotto recentemente anche se la teoria degli errori è stata a lungo parte della teoria e pratica della misura. Oggi è accettato il fatto che **quando tutte le componenti note o sospette dell'errore siano state valutate e corrette, rimanga sempre un'incertezza circa la correttezza del risultato ottenuto.**

Errori sistematici

L'errore sistematico è pari all'errore meno l'errore casuale. Il suo valore non può essere conosciuto esattamente perché non è noto il valore vero.

Gli errori sistematici producono variazioni di verso e entità costanti al ripetersi delle misurazioni; non possono essere eliminati ma spesso possono essere ridotti: se viene identificato un effetto sistematico esso può essere quantificato e, se esso è significativo per l'accuratezza richiesta, si può applicare una correzione numerica per compensarne l'effetto o procedere con un nuova misurazione in condizioni di non riproducibilità.

L'errore sistematico è la media che si potrebbe ottenere da un numero infinito di misurazioni del misurando sotto condizioni di ripetibilità meno il valore vero del misurando. L'errore sistematico può essere evidenziato se non si osservano condizioni di riproducibilità.

Si assume che il risultato di una misurazione sia stato corretto per tutti gli effetti sistematici significativi noti e che sia stato compiuto ogni sforzo per identificarli e che, dopo la correzione, il valore atteso dell'effetto sistematico corretto sia nullo.
Dopo la correzione degli effetti sistematici, il risultato di una misurazione è tuttavia solo una stima del valore del misurando.

Correzione/fattore correttivo

valore che va sommato algebricamente/moltiplicato per il risultato per compensare l'errore sistematico; la compensazione non può essere completa in quanto non è noto l'errore.

Condizioni di ripetibilità:

esistono quando lo stesso osservatore effettua misure della stessa grandezza fisica usando lo stesso metodo di misura e gli stessi strumenti nelle stesse condizioni ed in un breve intervallo di tempo.
Le variazioni di osservazioni ripetute vengono attribuite al fatto che sono variate grandezze influenti.

Grandezza influente:

grandezza diversa dal misurando che influisce sul risultato di una misurazione; p.es.: la temperatura di un micrometro o la frequenza di una tensione alternata.

Condizioni di riproducibilità:

possono esistere quando diversi osservatori eseguono misure di una stessa grandezza fisica (opportunamente definita) utilizzando lo stesso metodo di misura ma strumenti diversi e in luoghi e tempi diversi. Il confronto dei risultati ottenuti sotto condizione di riproducibilità può evidenziare la presenza di effetti sistematici non determinabili da ciascun osservatore separatamente.

INCERTEZZA

> ***Riportando il risultato di una misura è obbligatorio fornire qualche indicazione quantitativa della qualità del risultato affinché i suoi utilizzatori possano stabilirne l'affidabilità.***
> ***Senza tale indicazione i risultati delle misure non possono essere confrontati né fra di loro né con valori di riferimento.***

Errore ed incertezza non sono sinonimi ma due concetti diversi: il primo è qualitativo perché si basa sul valore vero che non è noto; il secondo è quantitativo perché si basa sui valori dei risultati delle misurazioni.

Quando tutte le componenti note o sospette dell'errore siano state valutate e corrette, rimane sempre un'incertezza circa la correttezza del risultato ottenuto.

L'incertezza comprende in generale diverse componenti; alcune possono essere valutate statisticamente (**incertezze di tipo A**); altre vengono valutate assumendo distribuzioni di probabilità assunte sulla base dell'esperienza o di altre informazioni (**incertezze di tipo B**).
Le componenti della categoria A sono caratterizzate dalle stime delle varianze σ^2 o delle deviazioni standard σ e dal numero di gradi di libertà ν.
Le componenti della categoria B devono essere caratterizzate da quantità che possono essere considerate approssimazioni delle corrispondenti varianze (la cui esistenza è assunta); analogamente per le approssimazioni delle deviazioni standard.

L'incertezza viene generalmente espressa dal parametro statistico deviazione standard (o un suo multiplo).
L'incertezza standard del risultato di una misurazione derivata ottenuto dai valori di altre grandezze è detta **incertezza standard combinata**. La corrispondente deviazione standard stimata è pari alla radice quadrata della varianza combinata ottenuta dalle varianze delle varie componenti (legge di propagazione delle incertezze).

Una scienza è esatta nel limite in cui riesce a determinare l'incertezza dei suoi risultati