Ottica Geometrica

Dipartimento di Scienze
di Base e Applicate
per l'Ingegneria

Sapienza
Università di Roma

23.4. CONVENZIONI SUI SEGNI PER GLI SPAZI OGGETTO E IMMAGINE

Nel paragrafo precedente abbiamo considerato il caso di un oggetto posto di fronte a una superficie riflettente sferica e abbiamo accennato alla maniera con cui si può procedere per determinare l'immagine prodotta. Naturalmente diverse situazioni possono verificarsi secondo che il centro di curvatura della superficie riflettente si trovi entro o fuori della regione dello spazio libero per la propagazione, secondo la posizione dell'immagine rispetto alla superficie dello specchio ecc. Appare immediatamente l'interesse di cercare di stabilire relazioni che possano servire a trattare tutti i possibili casi.

Circostanze analoghe si presenteranno in seguito quando si studierà l'effetto di superfici rifrangenti sul percorso dei raggi.

Una tale procedura richiede di fissare in maniera chiara alcune convenzioni sui segni algebrici da dare alle grandezze geometriche che individuano la posizione degli oggetti e delle immagini rispetto alle superfici sferiche di discontinuità, le dimensioni degli oggetti e delle immagini, la posizione dei centri di curvatura. Varie convenzioni possono essere e sono usate. Noi seguiremo quelle qui sotto specificate:

1. tutti i diagrammi sono fatti supponendo che la luce proceda da sinistra verso destra;
2. la distanza p dell'oggetto è positiva se il punto è a sinistra della superficie riflettente (o rifrangente);
3. la distanza p' dell'immagine è positiva se l'immagine è a destra della superficie riflettente (o rifrangente);
4. il raggio di curvatura della superficie è positivo se il centro di curvatura è a destra della superficie;
5. le eventuali dimensioni trasversali dell'oggetto (y) e dell'immagine (y') sono positive al di sopra dell'asse.

Nel caso dello specchio convesso della figura 23.5 p, p', R sono positivi e come si è visto vale la (8). La figura 23.7 mostra la situazione nel caso che l'oggetto abbia dimensioni trasversali e in tal caso y e y' hanno lo stesso segno e l'ingrandimento (9) è positivo: ciò significa che l'immagine è diritta rispetto all'oggetto. Si consideri il caso in cui lo specchio sia concavo (R negativo): le figure 23.8a e b sono le analoghe delle 23.5 e 23.7 per uno specchio convesso. Per trovare la posizione dell'immagine (fig. 23.8a) si può scrivere

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha + i \\ \gamma &= \beta + i \\ \alpha + \gamma &= 2\beta \end{aligned} \tag{10}$$

D'altra parte, nel caso in cui α, β, γ siano piccoli è con buona approssimazione:

$$\alpha = \frac{h}{p}, \quad \gamma = -\frac{h}{p'}, \quad \beta = -\frac{h}{R} \tag{11}$$

di conseguenza,

$$\boxed{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = -\frac{2}{R}} \tag{12}$$

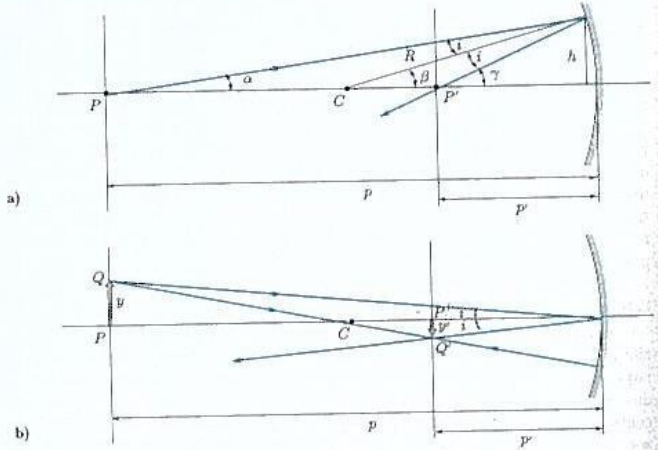


Fig. 23.8

Questa è ancora l'equazione (8), che quindi è valida anche per gli specchi concavi, se opportuna attenzione è data ai segni delle grandezze che vi intervengono.

Per l'ingrandimento, giacché (fig. 23.8b)

$$\tan i = \frac{y}{p} = \frac{-y'}{-p'} = \frac{y'}{p'}$$

si ha

Ingrandimento trasversale

(13) $$\boxed{m = \frac{y'}{y} = \frac{p'}{p}}$$

Come si può facilmente verificare, e come vedremo meglio tra breve, può accadere che p e p' abbiano segni opposti (fig. 23.8b), talché l'ingrandimento è negativo: ciò significa che l'immagine è capovolta rispetto all'oggetto.

23.5. DISTANZA FOCALE. FORMULA DEGLI SPECCHI SFERICI. COSTRUZIONE GRAFICA DELLE IMMAGINI

Con le precisazioni sui segni date nel paragrafo precedente, la relazione che lega le posizioni (per dir meglio le ascisse) dell'oggetto e dell'immagine formata da uno specchio di raggio R è [eq. (8) e (12)]

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = -\frac{2}{R}$$

Nel caso che l'oggetto sia a distanza infinita ($p \to \infty$) ([10]), l'immagine

([10]) In pratica perché l'oggetto possa cosiderarsi "all'infinito" basta che p sia molto grande rispetto a R.

tende a una posizione cui corrisponde la distanza

$$p'_F = \frac{R}{2}$$

Se l'oggetto è puntiforme e sull'asse, considerarlo all'infinito equivale a considerare che sullo specchio incida un fascio di raggi paralleli all'asse; l'immagine è allora il punto F dell'asse a distanza p'_F dal vertice. Il segno di p'_F è lo stesso di quello di R. Nel caso perciò di specchio convesso ($R > 0$) l'immagine F è a destra dello specchio ed è quindi virtuale (fig. 23.9a); nel caso di specchio concavo ($R < 0$) l'immagine F giace a sinistra dello specchio ed è reale (fig. 23.9b). Considerare poi un oggetto puntiforme e all'infinito *ma non sull'asse* dello specchio significa considerare un fascio di raggi paralleli incidente obliquamente sullo specchio; nei limiti in cui tali raggi possono essere considerati parassiali (angolo di incidenza i sufficientemente piccolo), l'immagine è il punto P' (fig. 23.9c e d) intersezione del piano π_F per F normale all'asse con la retta a condotta per il centro di curvatura C dello specchio parallelamente al fascio (vedremo tra poco la giustificazione di tale costruzione).

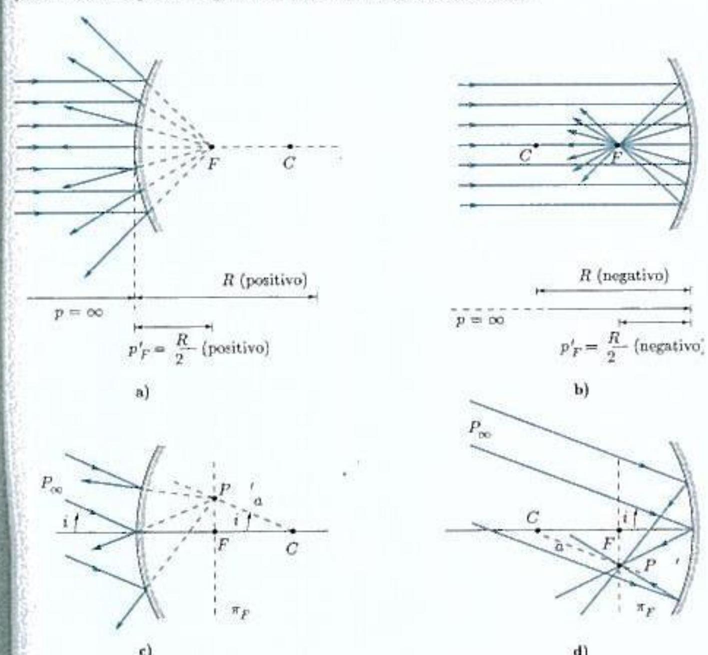
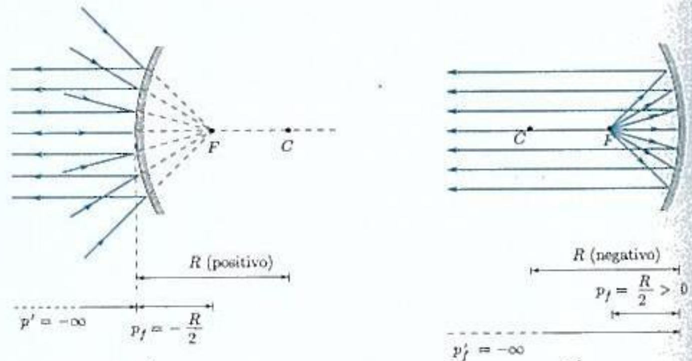


Fig. 23.9

Analogamente, l'immagine va all'infinito ($p' = -\infty$) quando l'oggetto si trova alla distanza

$$p_F = -\frac{R}{2}$$

Se si tratta di uno specchio convesso (R positivo) p_F è negativo, ciò significa che un fascio di raggi che in assenza dello specchio convergerebbe in F viene trasformato dallo specchio in un fascio parallelo all'asse (fig. 23.10a). Se invece R è negativo, cioè lo specchio è concavo, p_F risulta positivo: il punto F è a sinistra dello specchio; se in tale punto viene posto un oggetto i raggi da esso emergenti sono trasformati dallo specchio in un fascio di raggi paralleli all'asse (fig. 23.10b).



a) b)

Fig. 23.10

Il punto F prende il nome di fuoco [11], e il piano π_F quello di piano focale. Il fuoco può essere considerato come il punto immagine (reale o virtuale) del punto all'infinito nella direzione dell'asse. È anche il punto che gode della proprietà che i raggi che convergerebbero in esso, in assenza dello specchio se questo è convesso ($R > 0$), o che derivano da esso, se lo specchio è concavo ($R < 0$), sono trasformati per riflessione in raggi paralleli all'asse.

La distanza di F dal vertice prende il nome di distanza focale (f): il suo valore è pari alla metà del raggio di curvatura dello specchio. V'è ancora da aggiungere qualcosa sul segno algebrico da dare a tale distanza focale. Precisamente, si conviene [12] di porre

Distanza focale di uno specchio sferico

(14) $$\boxed{f = -\frac{R}{2}}$$

con l'appropriato segno per R; così nel caso degli specchi convessi ($R > 0$) la distanza focale viene assunta negativa, mentre nel caso degli specchi concavi ($R < 0$) essa viene assunta positiva.

[11] Lo specchio sferico ha un solo fuoco, a differenza del diottro sferico (par. 23.6).

[12] La convenzione è scelta in modo da avere una descrizione analoga a quella valida per le lenti (che vedremo in seguito): per distanza focale positiva il sistema è tale da trasformare un fascio di raggi incidente paralleli all'asse in un fascio di raggi che realmente passa per un punto (immagine reale del punto all'infinito nella direzione dell'asse).

Usando questa convenzione la formula che lega le ascisse dell'oggetto e dell'immagine e quella relativa all'ingrandimento si scrivono, in generale

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}=\frac{1}{f} \quad , \quad m=\frac{p}{p'} \tag{15}$$

L'impiego di tali formule ([13]) per la soluzione di problemi concreti è abbastanza semplice; occorre fare attenzione al corretto uso delle convenzioni sui segni.

Costruzione grafica delle immagini

Molto spesso è utile costruire graficamente l'immagine di un oggetto. Un metodo semplice è quello di costruire l'immagine di alcuni punti dell'oggetto fuori dell'asse ottico i quali consentano di determinare l'immagine intera dell'oggetto. Per trovare l'immagine di un punto fuori asse è sufficiente determinare l'intersezione di *due* raggi riflessi ed è chiaro che conviene scegliere i raggi in partenza dall'oggetto in modo che i raggi riflessi si sappiano costruire facilmente. In genere si considerano due dei seguenti raggi:

1. il raggio parallelo all'asse, che viene trasformato in raggio passante per il fuoco;
2. il raggio passante per il fuoco, che viene trasformato in raggio parallelo all'asse;
3. il raggio passante per il centro di curvatura, che viene riflesso su se stesso.

La figura 23.11a e b mostra come questi raggi possano essere usati per determinare l'immagine (reale o virtuale) data da uno specchio concavo e da uno specchio convesso.

In base a questi criteri grafici, è facile costruire l'immagine data da uno specchio concavo o convesso di oggetti variamente distanti dallo specchio medesimo: la figura 23.12 illustra sinteticamente la situazione nei vari casi. L'esame di tale figura porta ad alcune interessanti osservazioni:

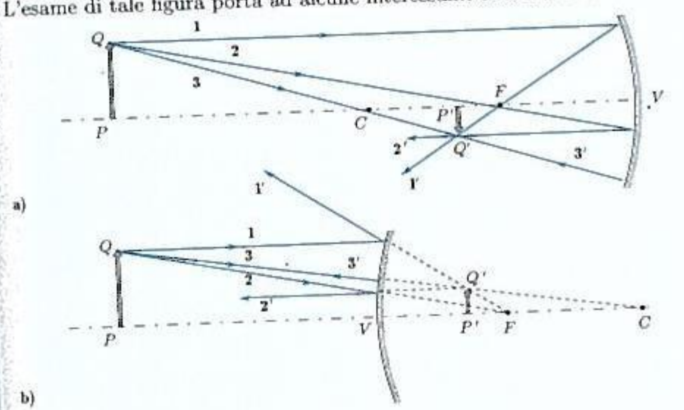


Fig. 23.11

([13]) Insistiamo ancora sul fatto che tali formule sono valide soltanto *per specchi di piccola apertura e per raggi parassiali.*

Tale immagine può essere considerata come oggetto [31] per il secondo diottro; in tal caso la distanza dell'oggetto dal diottro è $-p'$. L'immagine fornita dal secondo diottro, che è poi l'immagine fornita dalla lente, si trova a una distanza p_2 data dalla relazione

$$-\frac{n_2}{p'} + \frac{n_1}{p_2} = \frac{n_1 - n_2}{R_2} \tag{41}$$

Dalle (40) e (41) si ha:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1}\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \tag{42}$$

Ponendo rispettivamente p_1 o p_2 pari a ∞ si trova per le distanze focali

Fuochi della lente sottile

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1}\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \tag{43}$$

e quindi (formula delle lenti sottili di piccola apertura):

Equazione della lente sottile

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{f} \tag{44}$$

Si ritrova, in accordo a quanto detto per i sistemi, che essendo la lente immersa in un unico mezzo $f_1 = f_2$ e la (44) si può ricavare dalla (34). La quantità $1/f$ si chiama potere diottrico (o convergenza) e se f è espresso in metri, tale potere risulta espresso in diottrie.

L'ingrandimento lineare prodotto da una lente può essere trovato con la stessa procedura usata nel determinare l'immagine; esso è pari al prodotto degli ingrandimenti dovuti alla formazione di immagini da parte di ciascun diottro. L'ingrandimento prodotto in seguito alla rifrazione al primo diottro vale, in accordo con la (32):

L'ingrandimento lineare della lente sottile è $m = -\frac{p_2}{p_1}$

$$m_1 = -\frac{n_1}{n_2}\,\frac{p'}{p_1}$$

essendo p' la distanza dell'immagine prodotta dal primo diottro. Per il secondo diottro $p_1 = -p'$, e quindi è

$$m_2 = -\frac{n_2}{n_1}\,\frac{p_2}{(-p')}$$

risulta perciò

$$m = m_1 m_2 = -\frac{p_2}{p_1} \tag{45}$$

La costruzione dell'immagine di un oggetto fornita da una lente si effettua con le norme già viste: un oggetto in un piano normale all'asse ha una immagine in un altro piano anche esso normale all'asse. Basta quindi determinare le immagini di pochi punti fuori asse dell'oggetto: per far ciò basta considerare alcuni raggi che partono da ciascun punto oggetto considerato per i quali è facile determinare l'effetto della lente; l'intersezione dei raggi deviati dalla lente fornisce il punto immagine cercato. Si considerano di solito i seguenti raggi (fig. 23.20):

[31] Un tale oggetto è virtuale se l'immagine fornita dal primo diottro è reale e viceversa.

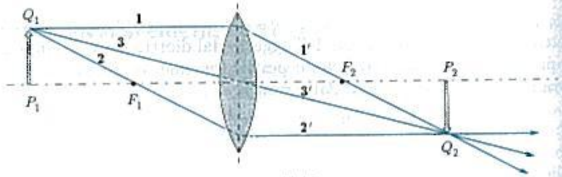


Fig. 23.20

1. quello parallelo all'asse, che è deviato in modo da passare per il secondo fuoco;
2. quello per il primo fuoco, che emerge parallelo all'asse;
3. quello per il centro della lente, che non è deviato.

Lenti convergenti e divergenti

Le lenti si dicono convergenti o divergenti secondo che f è positivo o negativo.

lenti convergenti

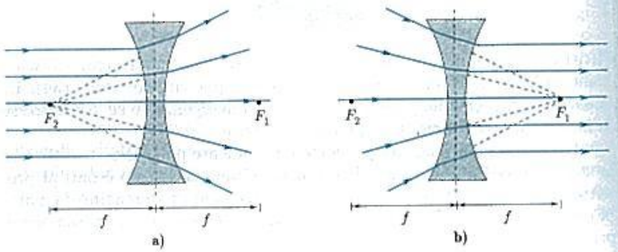


Fig. 23.21

Come mostra la (43), il segno di f dipende sia dal valore relativo degli indici di rifrazione del materiale di cui è fatta la lente (n_2) e del mezzo in cui la lente è immersa (n_1), sia dal valore relativo dei raggi di curvatura delle facce (R_1, R_2). Nel caso, normale, in cui n_2 è maggiore di n_1 (per esempio, ordinarie lenti di vetro in aria), si deduce che una lente sottile è convergente oppure divergente a seconda che essa sia più spessa al centro oppure più spessa ai bordi; il contrario accade nel caso, invero non normale, che il materiale della lente sia meno rifrangente del mezzo circostante. Nel seguito, e specialmente nelle figure, supporremo sempre di trovarci nel caso normale: così le figure 23.20 e 23.21 mostrano le posizioni dei fuochi di una lente convergente e di una divergente, mentre la figura 23.22 mostra le forme tipiche di lenti convergenti e divergenti.

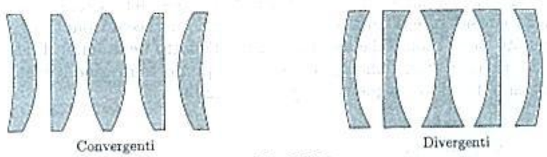


Fig. 23.22

Dalla (44) e dalla (45) si deduce che una lente divergente dà sempre immagini virtuali, diritte, impiccolite (uguali all'oggetto nel caso limite di un oggetto a contatto con la lente) (fig. 23.23).

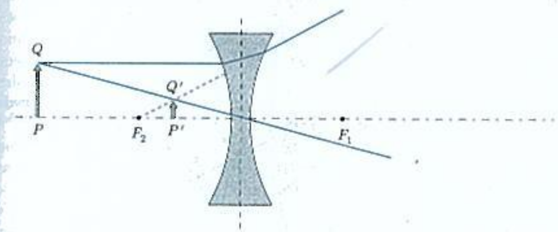


Fig. 23.23

Una lente convergente invece può fornire immagini reali o virtuali secondo la posizione dell'oggetto. Se l'oggetto è a sinistra di $F_1 (p_1 > f)$ l'immagine è reale e capovolta (fig. 23.24 a, b, c); le sue dimensioni crescono man mano che il punto si avvicina a F_1. Per $p_1 = 2f$ (fig. 23.24b) l'ingrandimento è unitario e $p_2 = p_1$. Per $p_1 = f$, l'immagine va all'infinito nella direzione determinata dal punto oggetto e dal centro della lente

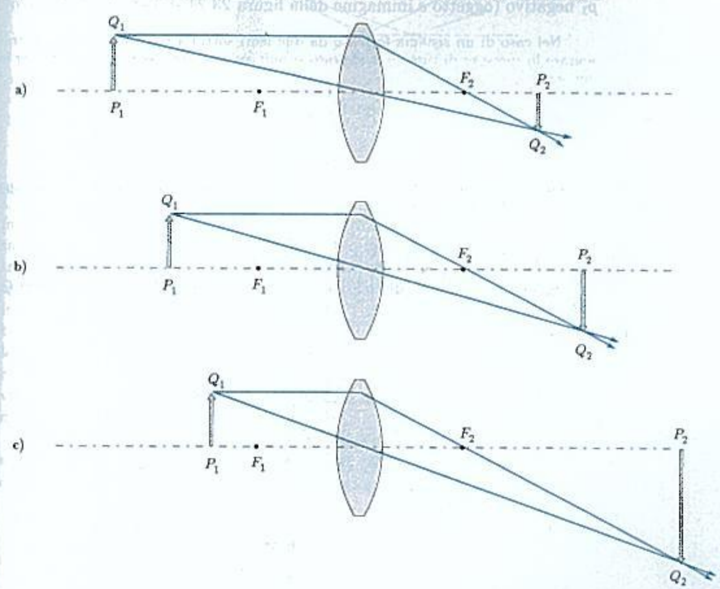
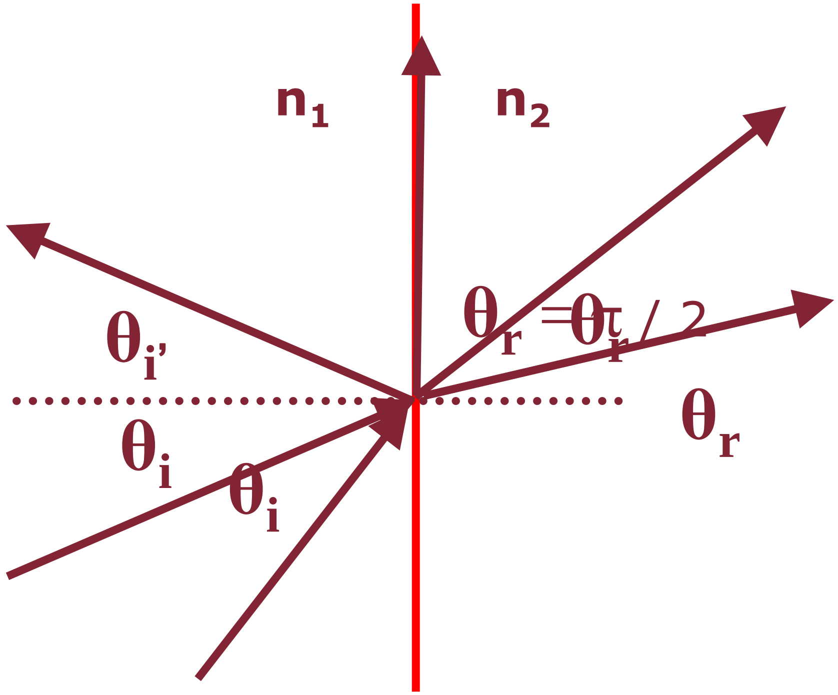


Fig. 23.24

Snell

$$\theta_i = \theta_{i'}$$
$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_r$$



Supponiamo $n_1 > n_2$

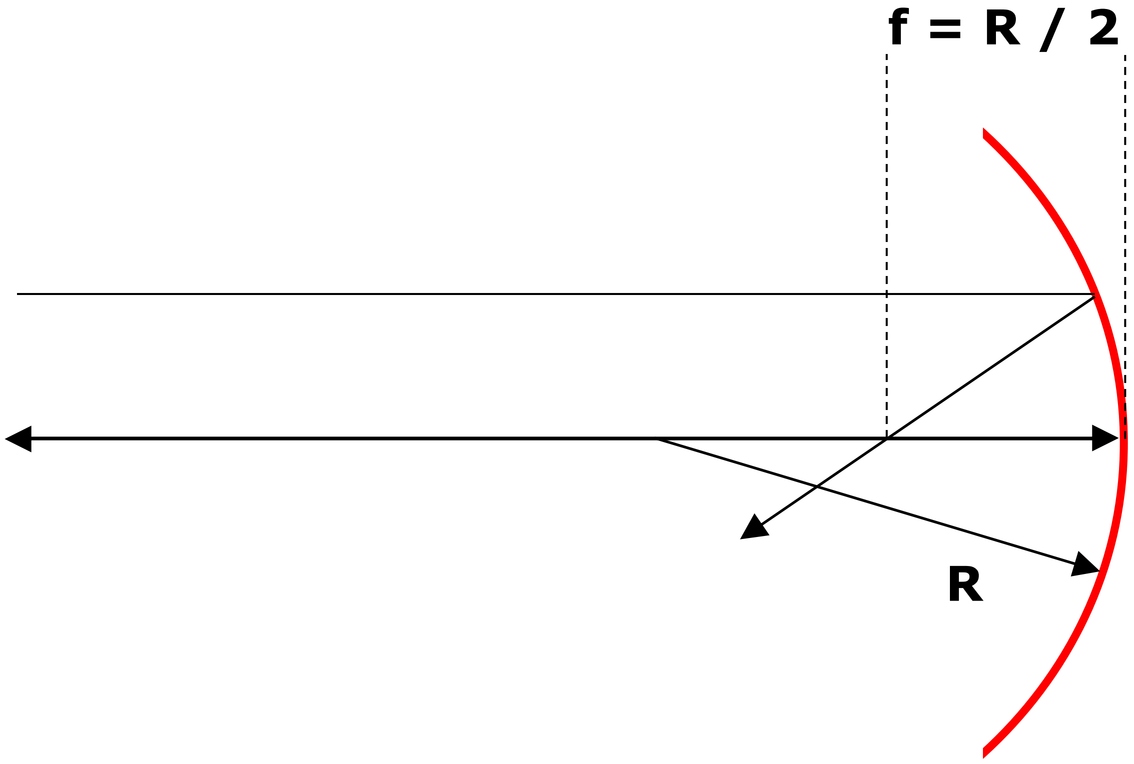
Quando $\sin\theta_i = n_2 / n_1 \Rightarrow \sin\theta_r = 1$ e $\theta_r = \pi / 2$

Per valori maggiori di θ_i non si può avere onda rifratta.

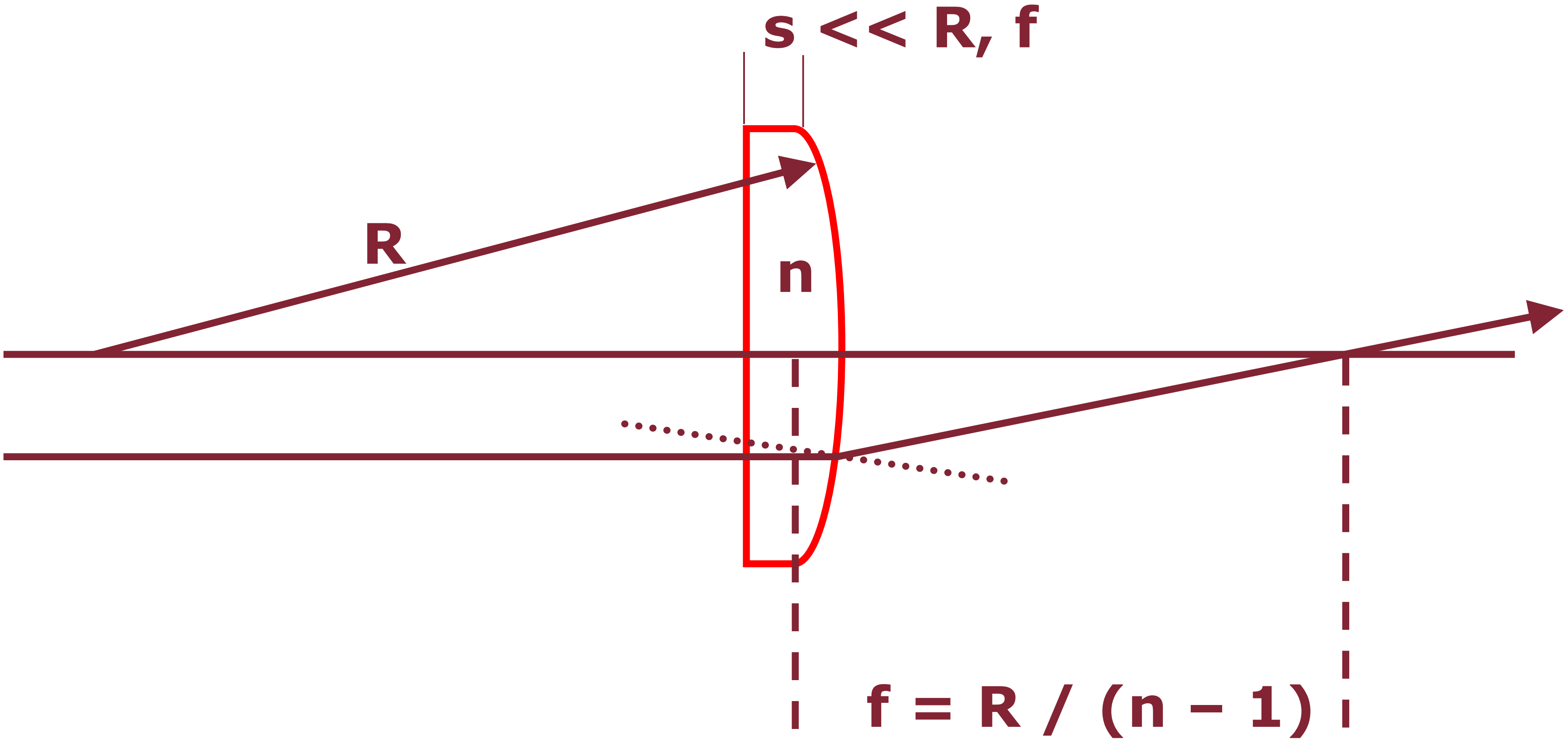
RIFLESSIONE TOTALE

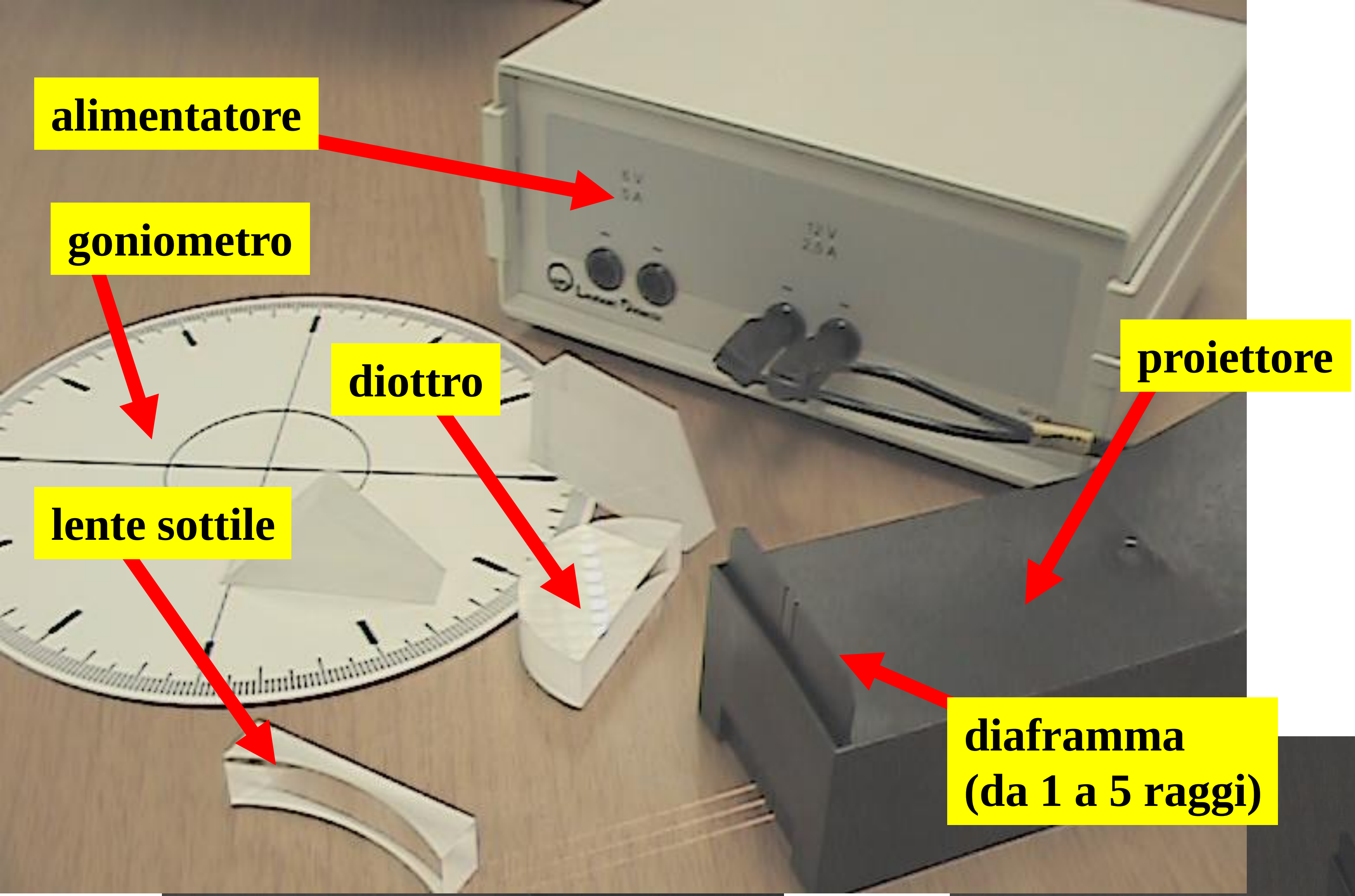
Il corrispondente angolo di incidenza si chiama angolo limite: $\sin\theta_l = n_2 / n_1$

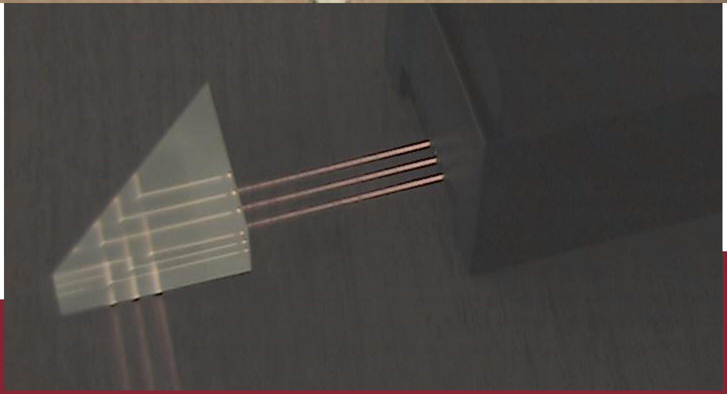
Specchi

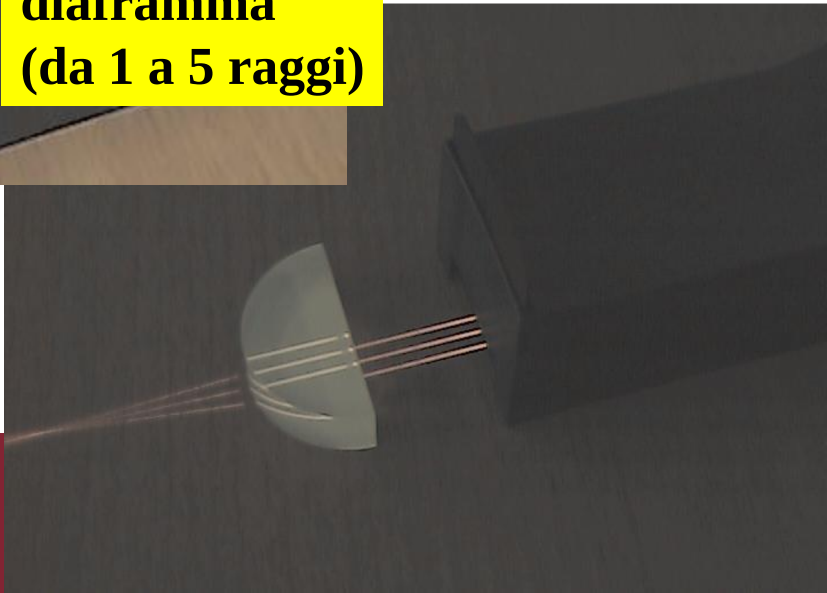


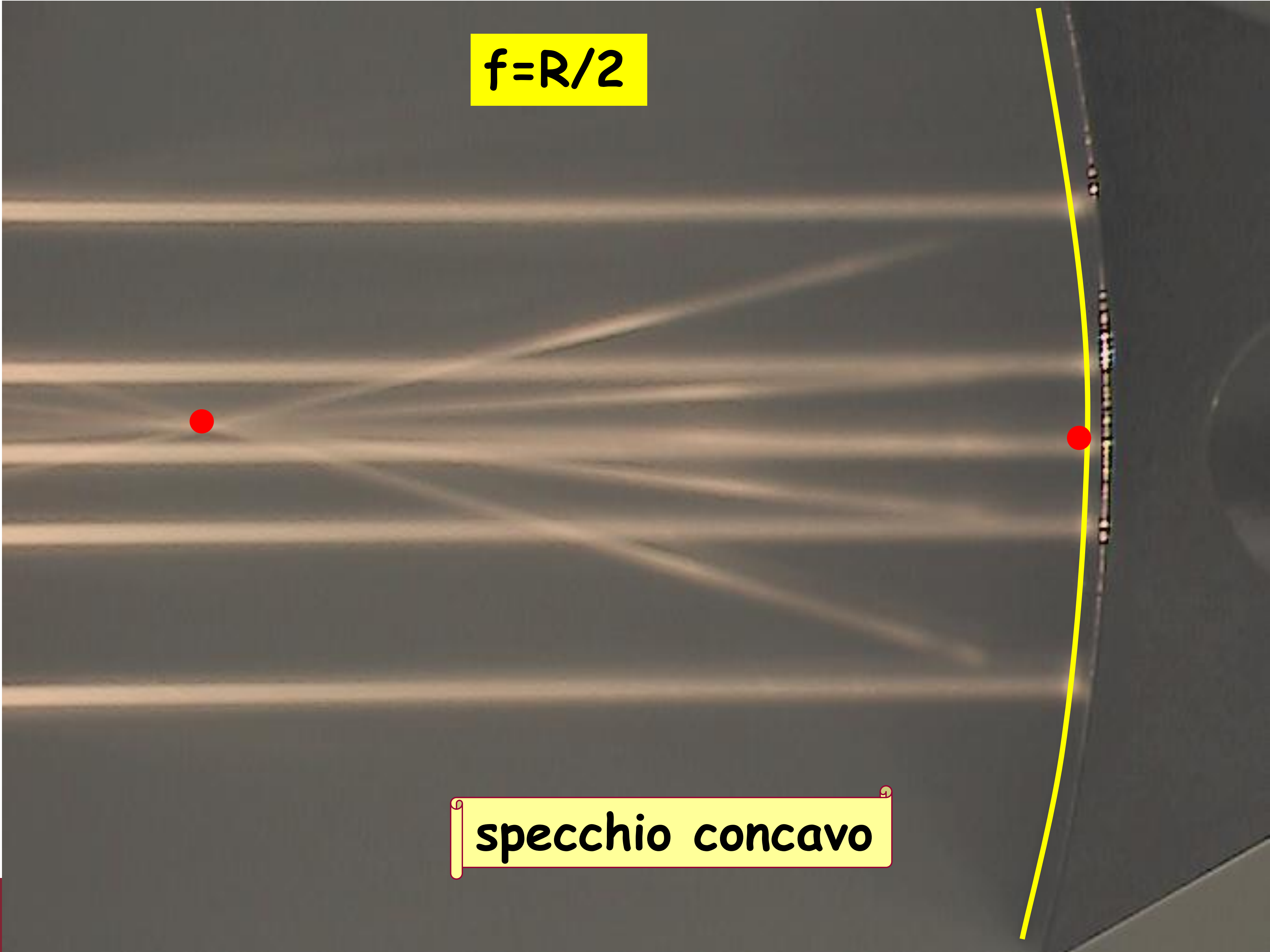
Lenti sottili in aria



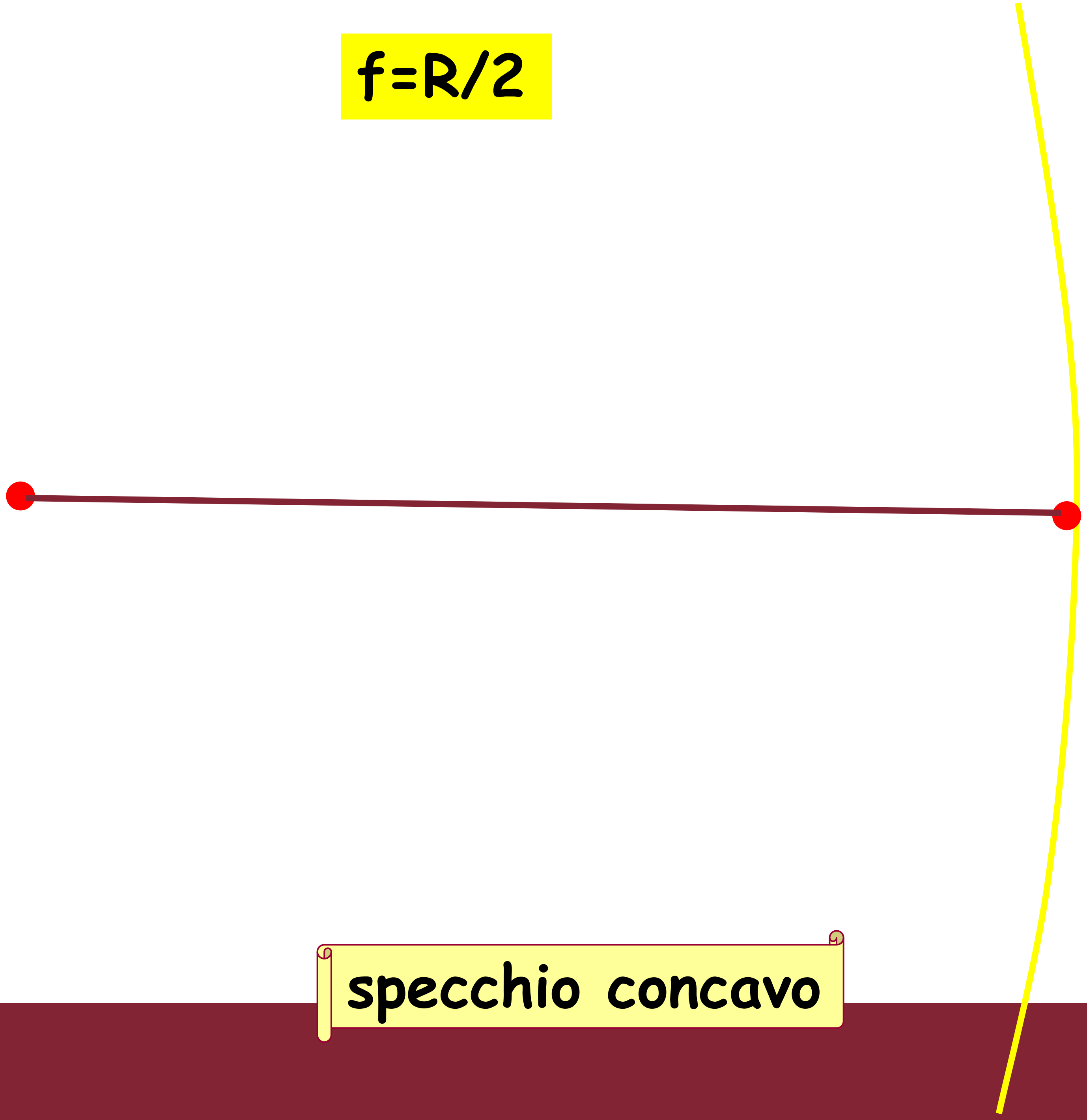

alimentatore
goniometro
diottro
lente sottile
proiettore
diaframma
(da 1 a 5 raggi)



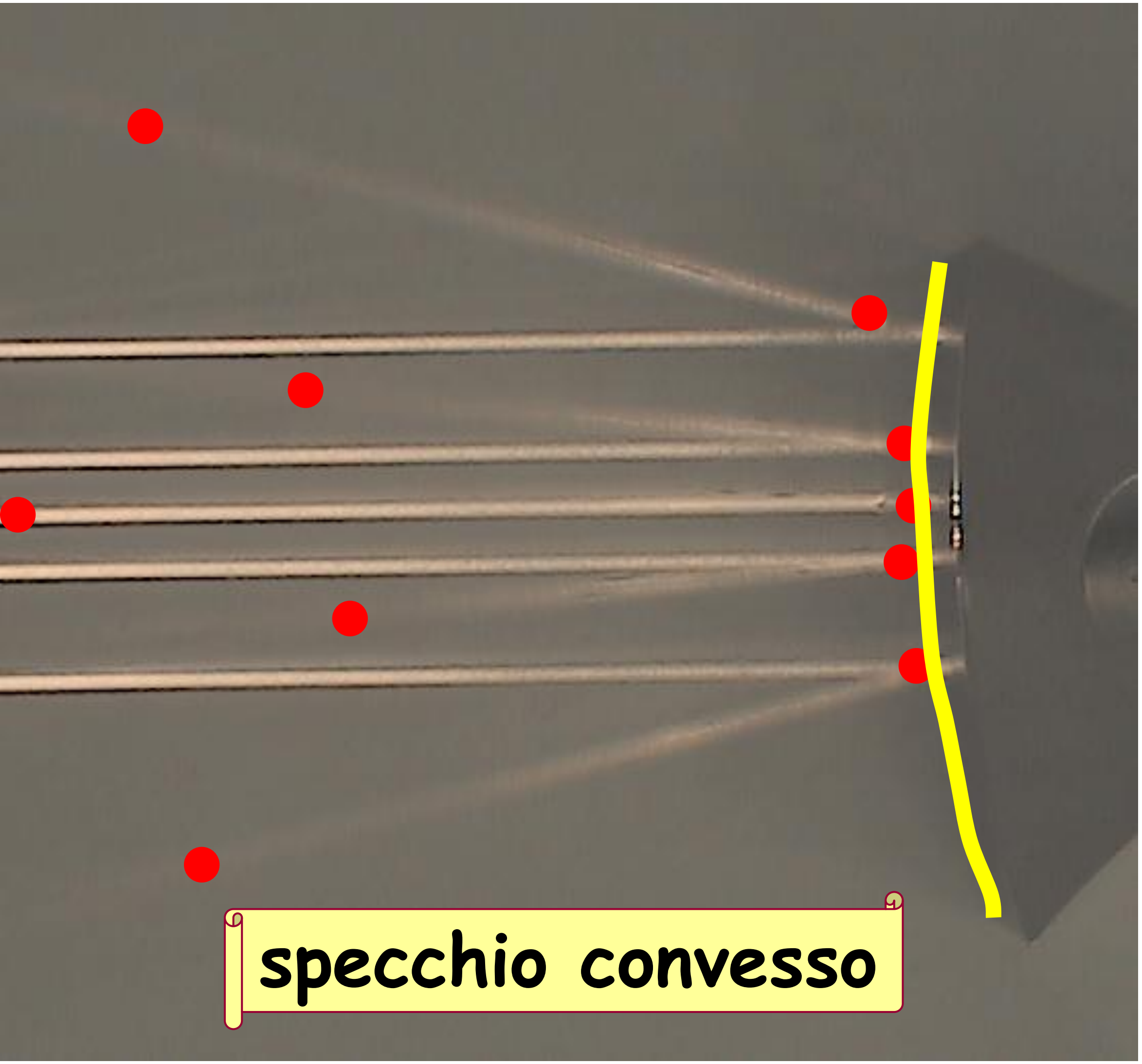


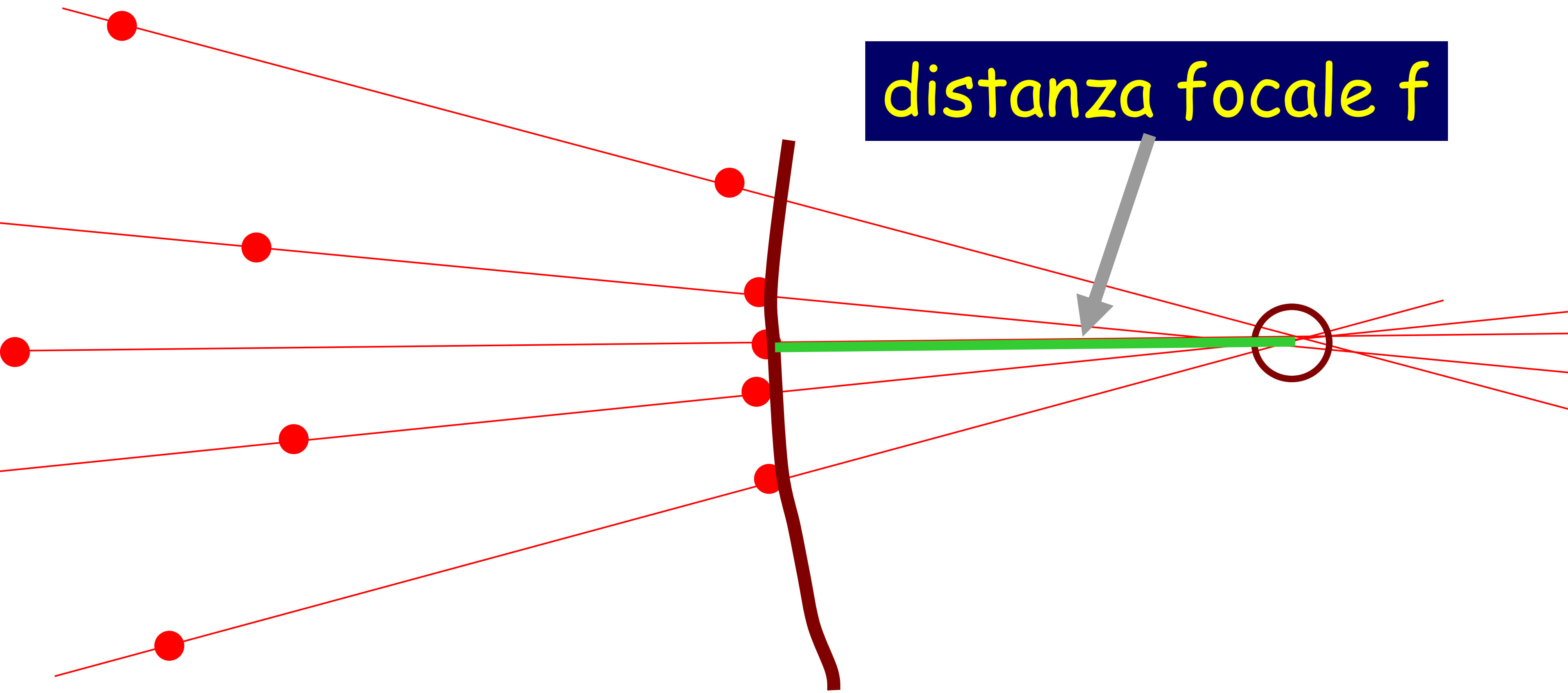

f=R/2
specchio concavo

$f = R/2$



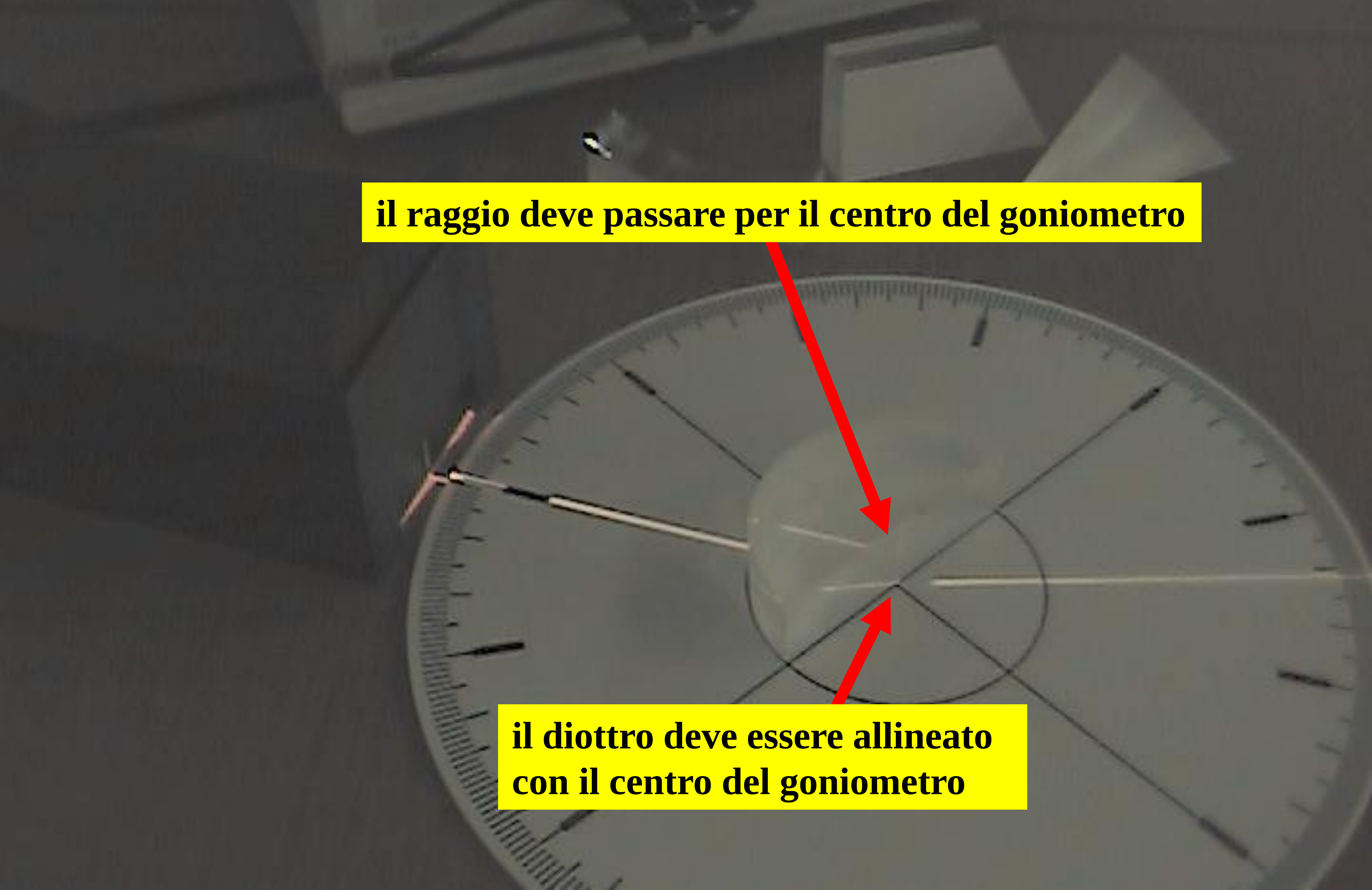
specchio concavo

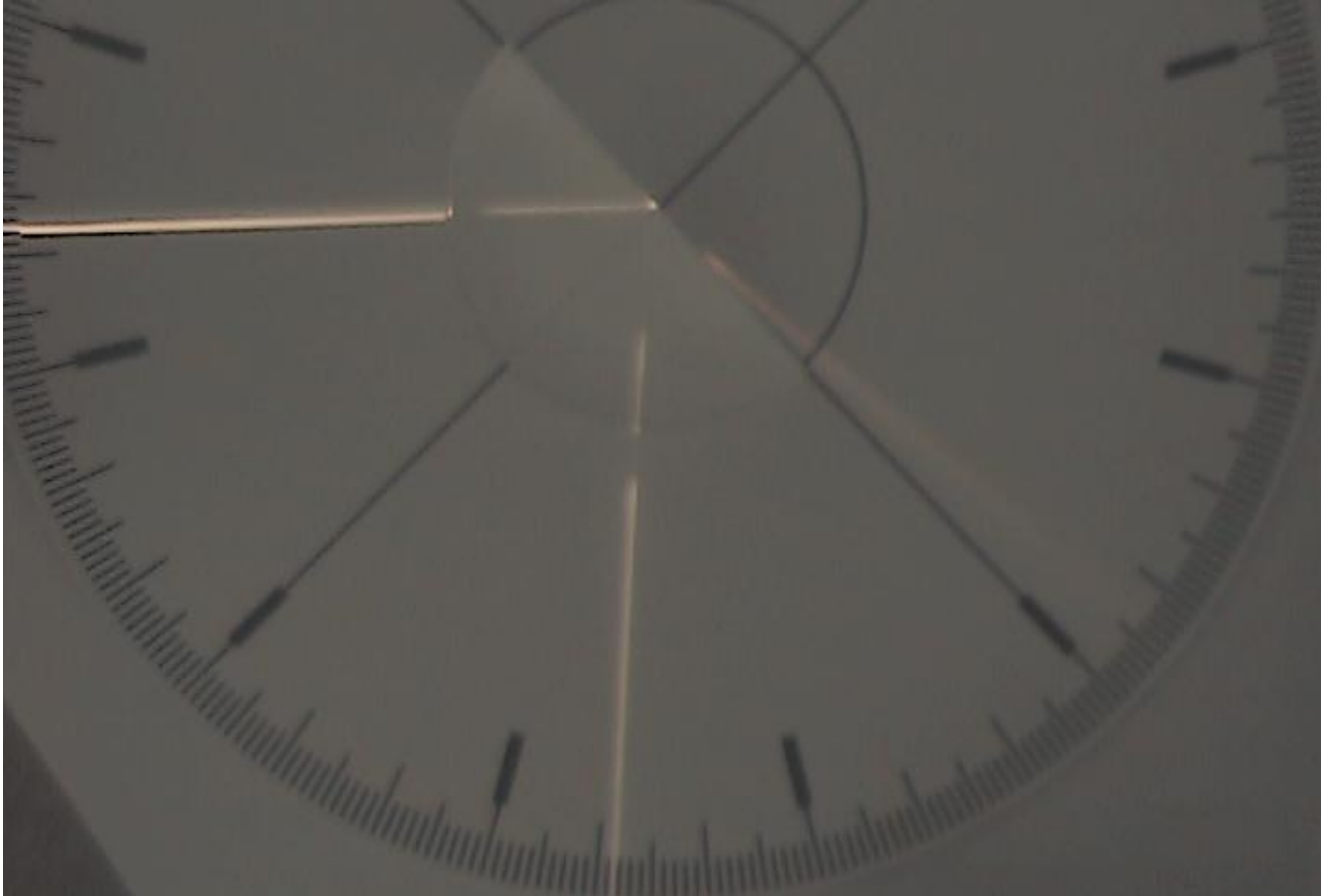

specchio convesso



$$f = R/2$$

Rifrazione e angolo limite

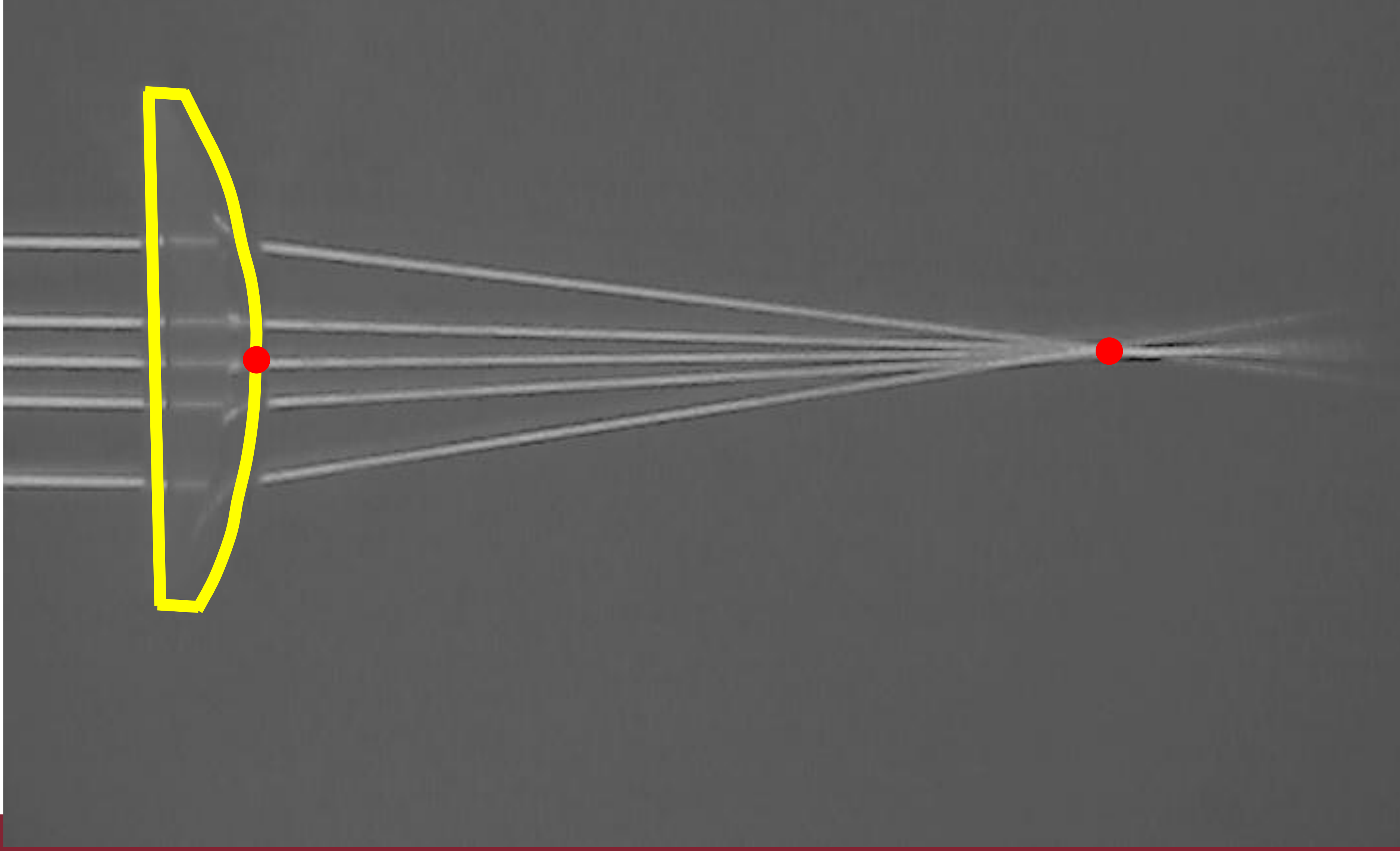




$$n_2/n_1 = \sin \theta_l$$

È sparito il raggio rifratto … che fine ha fatto la sua energia?

lente sottile convergente



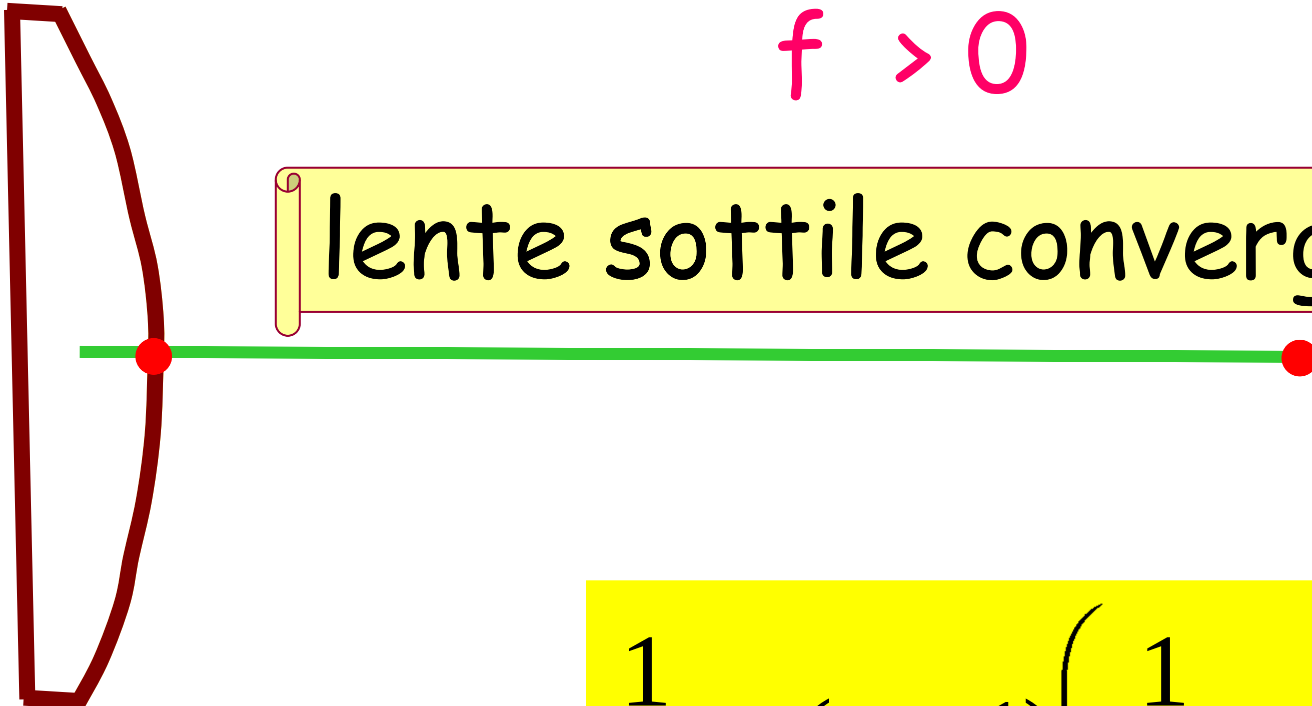
$R_1 = \infty$

$R_2 = ?$

$R_1 = \infty$

$R_2 = -f\,(n-1) < 0$

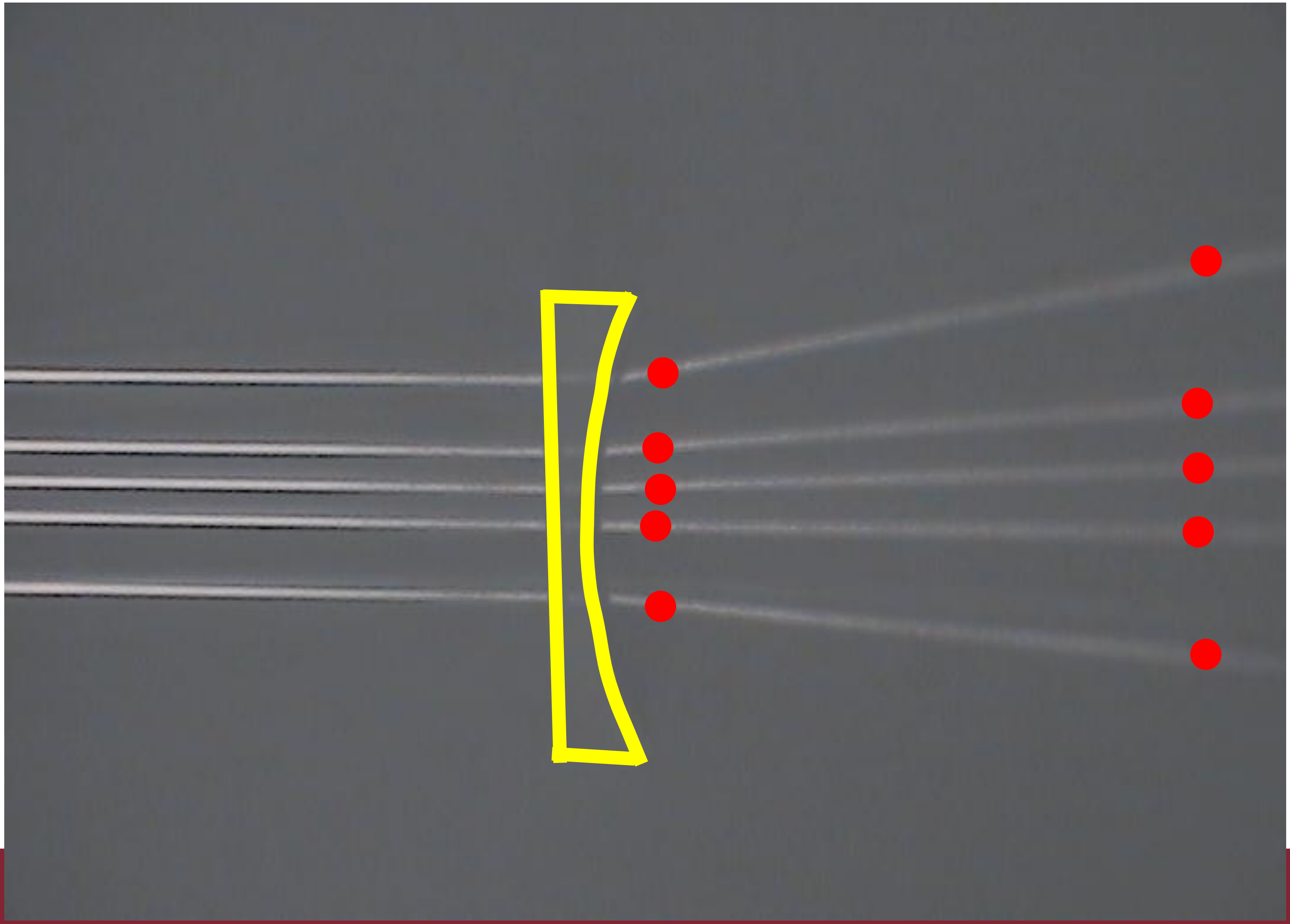
$f > 0$



lente sottile convergente

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

lente sottile divergente



$R_1 = \infty$

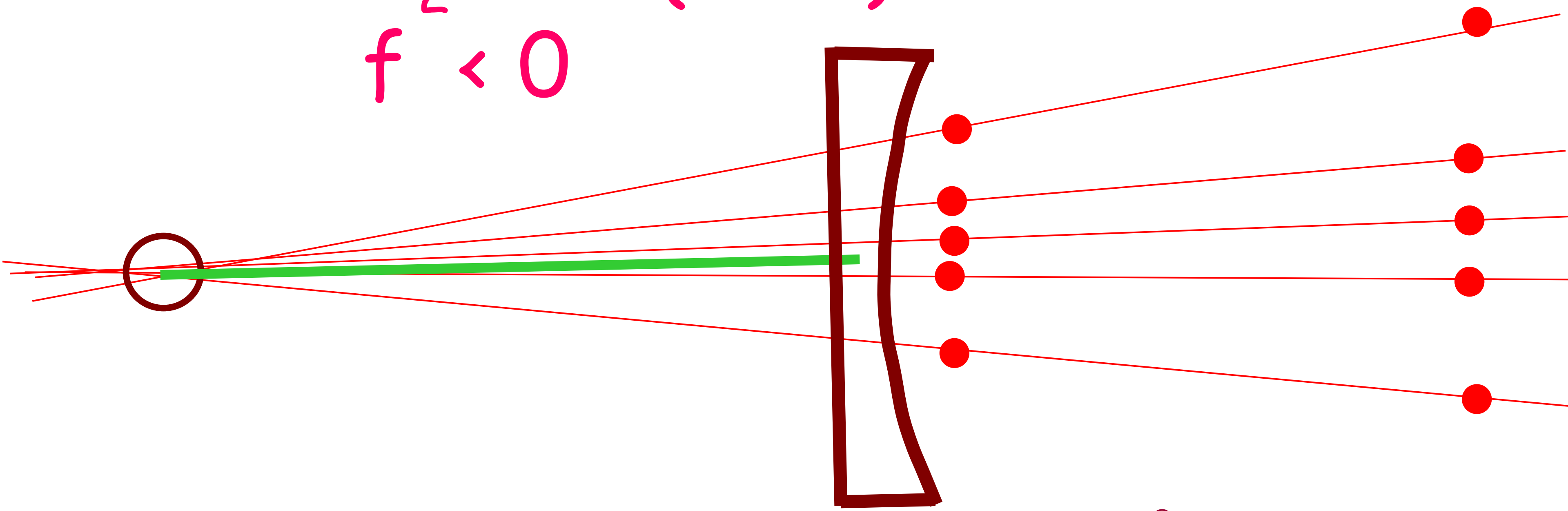
$R_2 = ?$

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$R_1 = \infty$

$R_2 = -f\,(n-1) > 0$

$f < 0$



lente sottile divergente

$R_1 = ?$

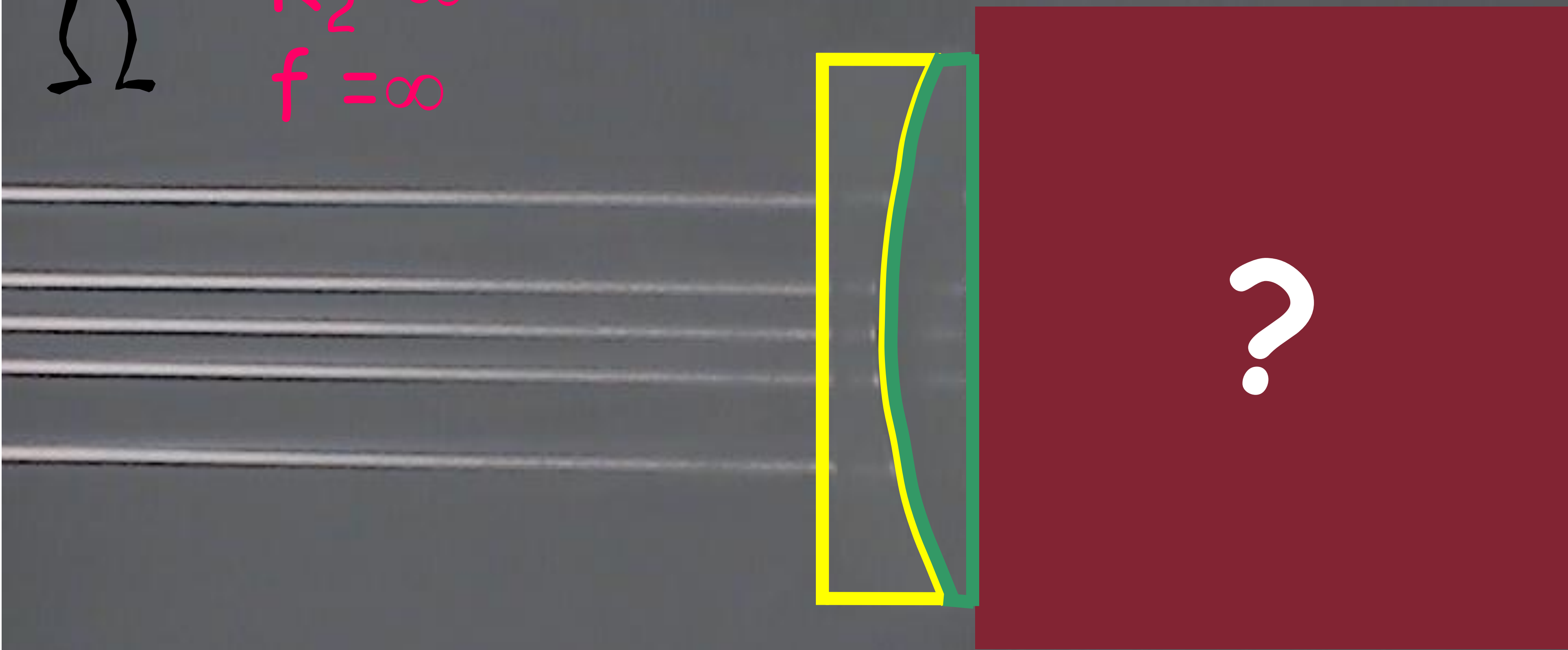
$R_2 = \infty$

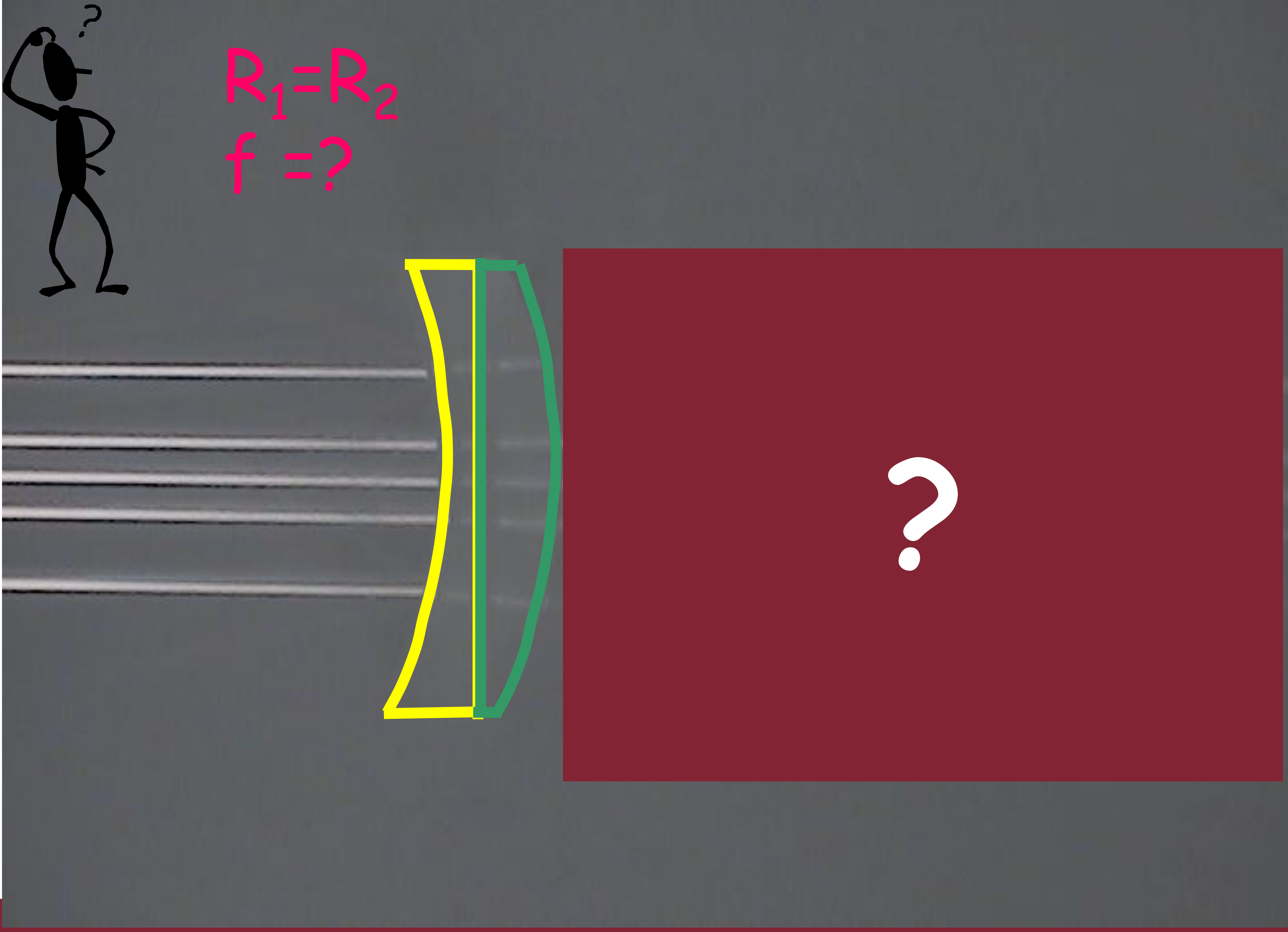
$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)?$$

$R_1 = \infty$

$R_2 = \infty$

$f = \infty$




$R_1 = R_2$
$f = ?$
?