Sapienza Università, Sede di Latina

Programma di Geometria per i corsi di Ingegneria, a.a. 2015-2016

docente: Andrea Vietri

Se non specificato con **dim.**, le dimostrazioni presenti nel testo di riferimento possono essere considerate un approfondimento facoltativo (alcune di queste dimostrazioni sono state tuttavia presentate, in modo sintetico, durante il corso). Sono facoltativi anche tutti gli approfondimenti indicati.

Matrici. Definizione di matrice e relativa simbologia. Operazioni con matrici. Matrici particolari. Determinante (definito mediante il primo teorema di Laplace) e sue principali proprietà. Complementi algebrici. Secondo teorema di Laplace. Teorema di Binet. Rango per minori. Matrice inversa. Riduzione a scala (metodo di Gauss). Rango per piloni. Teorema degli orlati. Calcolo della matrice inversa mediante la doppia riduzione a scala (approfondimento).

Vettori, spazi vettoriali, sottospazi. Vettori, spazi vettoriali. Vettori numerici e spazi vettoriali $\mathbf{R}^n$. Operazioni con vettori. Esempi di spazi vettoriali. Combinazioni lineari. Dipendenza e indipendenza lineare. Rango per righe e rango per colonne di una matrice. Basi di spazi vettoriali. Base canonica e altre basi in $\mathbf{R}^n$. Coordinate di un vettore rispetto a una data base. Sottospazi. Sottospazi di $\mathbf{R}^n$ e sistemi omogenei. Equazioni cartesiane e parametriche di sottospazi di $\mathbf{R}^n$. Sottospazio generato da alcuni vettori. Intersezione di sottospazi.

Sistemi lineari. Matrice incompleta e matrice completa di un sistema lineare. Sistemi lineari omogenei. Teorema di Cramer (**dim.** utilizzando la matrice inversa). Riduzione a scala per la soluzione di un sistema lineare. Teorema di Rouché-Capelli (**dim.** utilizzando il rango per piloni). Dimostrazione del medesimo teorema attraverso il rango per colonne (approfondimento). Scelta dei parametri per le soluzioni. Simbolo ∞^p. Discussione di sistemi lineari con coefficienti parametrici.

Vettori geometrici. Vettori geometrici liberi e vettori applicati, nel piano e nello spazio. Coordinate in un riferimento. Vettori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Rappresentazione di punti e di vettori geometrici. Vettore geometrico che ha come estremi due punti ordinati. Lunghezza di un vettore geometrico. Distanza tra punti. Versori. Vettore normalizzato. Proiezione ortogonale (numerica) di un vettore su un altro vettore (o sul suo prolungamento). Prodotto scalare tra vettori geometrici e sua formula cartesiana (**dim.** utilizzando la proiezione ortogonale). Parallelismo di due vettori, complanarità (nello spazio) di tre vettori. Angolo tra due vettori e calcolo del suo coseno.

Geometria del piano. Forma cartesiana (implicita ed esplicita), forma parametrica di una retta. Quota e coefficiente angolare. Eliminazione del parametro per passare da forma parametrica a cartesiana. Risoluzione di un sistema (di una sola equazione) per il processo inverso. Parametri direttori, coseni direttori. Parallelismo, perpendicolarità tra rette. Giacitura (retta passante per l'origine e parallela alla retta data). Fasci propri e impropri di rette. Equazioni di rette con specifiche iniziali. Allineamento di punti. Vettore normale (o perpendicolare) a una retta. Distanza tra un punto e una retta (**dim.** per l'analoga distanza tra punto e piano, nello spazio). Interpretazione geometrica di un sistema lineare in due variabili, come intersezione di rette.

Geometria dello spazio. Forma cartesiana, forma parametrica di un piano. Piani paralleli. Mutue posizioni di due piani. Allineamento di punti. Parametri direttori, coseni direttori di rette.

Forma cartesiana e parametrica di una retta. Eliminazione del parametro per passare da forma parametrica a cartesiana. Risoluzione di un sistema (di due equazioni) per il processo inverso. Parallelismo di rette. Fasci propri e impropri di piani. Fasci e stelle di rette. Equazioni di rette o piani con specifiche iniziali. Giacitura (piano o retta passante per l'origine e parallelo al piano o alla retta data). Rette sghembe. Mutue posizioni di rette (**dim.** del relativo teorema, sulle 4 configurazioni). Parallelismo tra retta e piano. Mutue posizioni di retta e piano. Vettore normale a un piano. Piani perpendicolari. Rette perpendicolari a un piano. Distanza tra un punto e un piano (**dim.** utilizzando un punto qualsiasi nel piano). Distanza tra un punto e una retta. Distanza tra rette (sghembe o parallele). Interpretazione geometrica di sistemi lineari in tre variabili. Angolo tra due piani, tra due rette, tra un piano e una retta.

Sottospazi di $\mathbf{R}^n$: intersezione, somma, ortogonalità. Prodotto scalare standard in $\mathbf{R}^n$. Vettori ortogonali. Sottospazio ortogonale a un dato sottospazio, e sue equazioni cartesiane. Somma di sottospazi. Relazione di Grassmann (approfondimento; questo argomento non sarà oggetto di discussione nelle prove d'esame). Prodotto vettoriale (cenno della dim. , supponendo già nota la distributività). Area di un parallelogramma nello spazio. Prodotto misto. Volume di un parallelepipedo. Basi ortogonali. Proiezione ortogonale e componente ortogonale di un vettore rispetto a un sottospazio. Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Coefficienti di Fourier.

Insiemi e applicazioni. Insiemi e relazioni di equivalenza (approfondimento). Applicazioni tra insiemi. Dominio, codominio, immagine, controimmagine. Applicazioni iniettive, suriettive, biiettive. Composizione di applicazioni. Applicazione inversa di un'applicazione biiettiva.

Applicazioni lineari. Applicazioni lineari tra spazi vettoriali generici. Applicazioni lineari da $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$. Matrice associata ad una applicazione lineare, rispetto a una base del dominio e ad una del codominio. Composizione di applicazioni lineari e prodotto delle relative matrici. Nucleo e immagine. Iniettività, suriettività biiettività di un'applicazione lineare, e loro relazione col rango della matrice associata. Legame tra il nucleo e l'iniettività (**dim.** dell'unicità della controimmagine, utilizzando il rango del sistema omogeneo associato). Matrice inversa per l'applicazione inversa. Descrizione geometrica di un'applicazione lineare, se le dimensioni del dominio e del codominio sono minori o uguali a 3.

Cambiamenti di coordinate. Matrice del cambiamento di coordinate e significato della sua inversa. Matrice di un'applicazione lineare rispetto a due nuove basi nel dominio e nel codominio, o ad una nuova base solo nel dominio o solo nel codominio. Rotazioni e riflessioni di un riferimento cartesiano.

Autovettori e diagonalizzazione. Autovettori e autovalori di un'applicazione lineare tra spazi vettoriali uguali. Diagonalizzazione mediante un opportuno cambiamento di base. Polinomio caratteristico. Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica. Diagonalizzazione di applicazioni la cui matrice è simmetrica (teorema spettrale).

Coniche e quadriche. Coniche non degeneri: loro definizione mediante i due fuochi (per ellisse e iperbole) e mediante fuoco e direttrice (anche per la parabola). Eccentricità. Coniche come sezioni di un cono. Forme canoniche di coniche ottenute a partire dalle definizioni geometriche, e relative formule. Traslazioni/rotazioni del riferimento, e loro effetto sull'equazione di una conica. Riflessioni. Equazione generica della sfera e analogia con la circonferenza. Equazione generica di una parabola con asse parallelo o uguale a un asse cartesiano, e relative formule. Matrice associata a una conica in forma generale e processo di riduzione a forma canonica (sia con un esplicito cambiamento di coordinate, che con il calcolo del determinante invariante). Cenni sulle quadriche.