

Cenni di teoria della relatività ristretta

Prof. Mauro Migliorati

AA 2019 - 2020

DIPARTIMENTO DI SCIENZE
DI BASE E APPLICATE
PER L'INGEGNERIA



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

I principi della meccanica classica

La meccanica classica o newtoniana è costituita da un insieme di principi ed equazioni proposto principalmente da Galilei (1564 - 1642) e Newton (1642 - 1727). La meccanica relativistica estende e generalizza tali leggi per spiegare nuove evidenze empiriche di cui si venne a conoscenza agli inizi del secolo XX e che risultavano in contraddizione con la meccanica classica.

I principi fondamentali che regolano le leggi della meccanica classica si possono così riassumere:

1. Il principio di relatività (Galilei): Due sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro sono indistinguibili;
2. Il principio di inerzia (Galilei-Newton): Un sistema di riferimento è inerziale se in esso un corpo non soggetto ad alcuna forza, e libero di muoversi, mantiene il suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme;
3. Il secondo principio (Newton) della dinamica: In un sistema di riferimento inerziale

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

4. Il terzo principio della dinamica di azione e reazione.

I principi della meccanica classica

Il principio di relatività fu enunciato per la prima volta da Galileo ed esprime la covarianza delle leggi fisiche rispetto a sistemi di riferimento che si muovono di moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro.

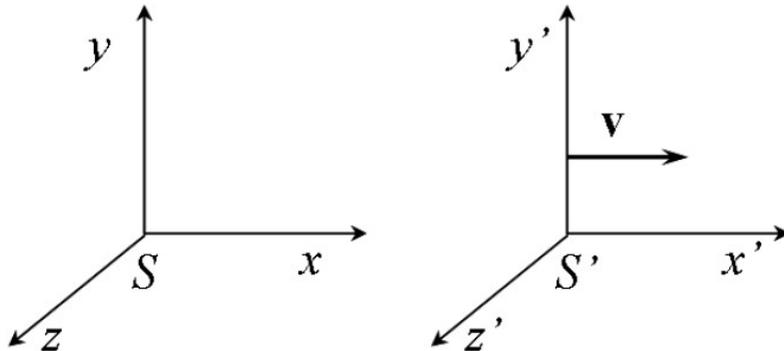
La covarianza indica l'invarianza della forma delle leggi fisiche sotto ogni trasformazione di coordinate differenziabile. Il concetto di base è che le coordinate non esistono a priori in natura, ma sono solo artifici usati nella descrizione della natura, e dunque non devono giocare nessun ruolo nella formulazione delle leggi fondamentali.

Il principio di inerzia stabilisce i criteri con i quali si possono identificare i sistemi di riferimento inerziali. In generale un sistema di riferimento è inerziale se si muove di moto rettilineo uniforme rispetto allo spazio assoluto.

A causa del suo moto di rivoluzione e di rotazione, ad esempio, non si può guardare alla terra come ad un sistema di riferimento in cui vale il principio di inerzia. Pertanto, Newton aveva individuato come un sistema di riferimento inerziale lo spazio astronomico, solidale con le stelle fisse, che egli identifica con lo spazio assoluto. Tutti i sistemi di riferimento di moto relativo uniforme rispetto ad esso, sono anch'essi inerziali.

I principi della meccanica classica

Il secondo principio della dinamica è consistente con il principio di relatività galileiana.


$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

Trasformazioni galileiane

Le trasformazioni galileiane assumono che il tempo sia una grandezza assoluta, invariante da un sistema di riferimento inerziale all'altro.

In due sistemi di riferimento inerziali le forze e le accelerazioni hanno sempre la stessa espressione, ovvero sono invarianti rispetto alle trasformazioni galileiane.

I principi della meccanica classica

Conseguenze → Nessun esperimento di meccanica mi può dire se mi sto muovendo:

- All'interno di uno stesso sistema di riferimento inerziale, senza guardare fuori, non sono in grado di dire se mi sto muovendo
- Se guardo fuori e vedo un altro che si sta muovendo, mi posso considerare fermo e dire che l'altro si sta muovendo. Ma è vero anche il viceversa.

Possiamo soltanto definire una velocità relativa rispetto ad un sistema di riferimento inerziale

La meccanica era auto-consistente (tutti erano contenti ...)



I principi della meccanica classica

Nel 1864 Maxwell pubblicò le 4 equazioni dell'elettromagnetismo: tutti i fenomeni meccanici elettrici e magnetici potevano così essere interpretati attraverso la meccanica newtoniana e le equazioni di Maxwell.

Ma le equazioni di Maxwell pongono delle questioni:

La relatività galileiana vale anche in elettromagnetismo? Se la risposta è sì, nessun esperimento eseguito all'interno di un sistema di riferimento permette di stabilire la velocità del sistema (non esiste una velocità assoluta!).

Ma non è così: le equazioni di Maxwell non sono invarianti per trasformazioni galileiane. \vec{E} e \vec{B} dipendono dal sistema di riferimento rispetto al quale si misurano. Questo genera forze differenti in due sistemi di riferimento inerziali!!!

Inoltre (ma è lo stesso problema), dalle equazioni di Maxwell, si ottiene che la luce viaggia ad una velocità fissa. Ma in quale sistema di riferimento?

I principi della meccanica classica

Riassumendo:

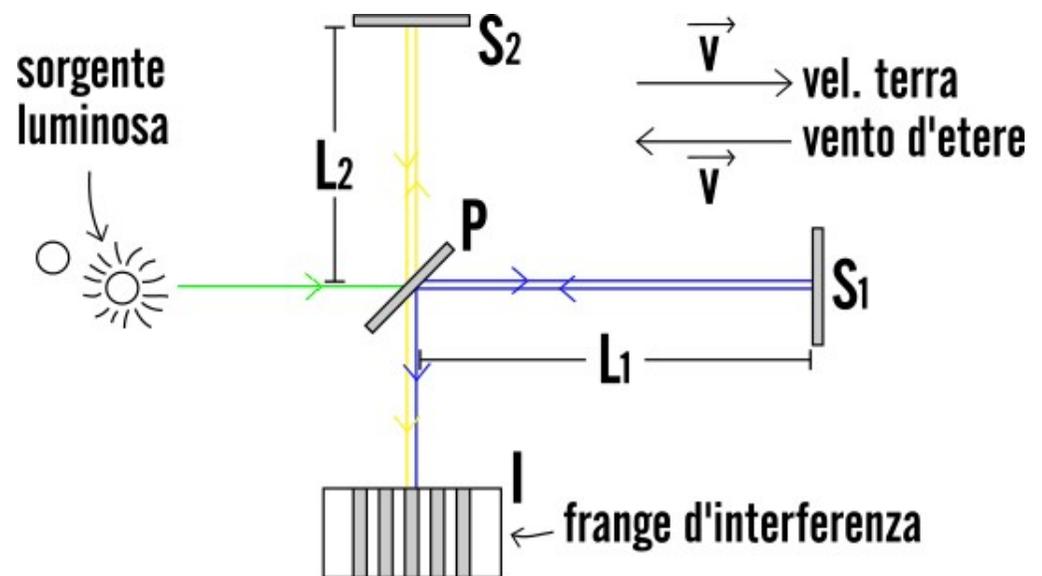
- 1)  Meccanica OK, vale la relatività galileiana
Elettromagnetismo OK; esiste un sistema di riferimento privilegiato (etere)
- 2)  Meccanica OK, vale la relatività galileiana
Elettromagnetismo sbagliato; non esiste un sistema di riferimento privilegiato
- 3)  Meccanica sbagliata, (riformularla con le giuste trasformazioni)
Elettromagnetismo OK; ma non le trasformazioni galileiane)

I principi della meccanica classica

Nel 1887 A. A. Michelson ed il suo collega E. W. Morley, con un esperimento diventato famoso e ripetuto per anni in seguito, cercarono di misurare le variazioni di velocità della luce in vari sistemi di riferimento. Essi usarono uno strumento chiamato interferometro che doveva provare l'esistenza dell'etere, mezzo "immateriale", che si ipotizzava solidale con le stelle fisse.

La Terra si muove intorno al Sole ad una velocità v di circa 30 km/s, quindi, se l'etere è immobile rispetto alle stelle fisse, si dovrebbe poter misurare tramite esperimenti ottici un vento d'etere, ovvero la differenza nella velocità dell'etere rispetto alla terra.

La figura mostra uno schema piuttosto semplificato dell'interferometro reale.

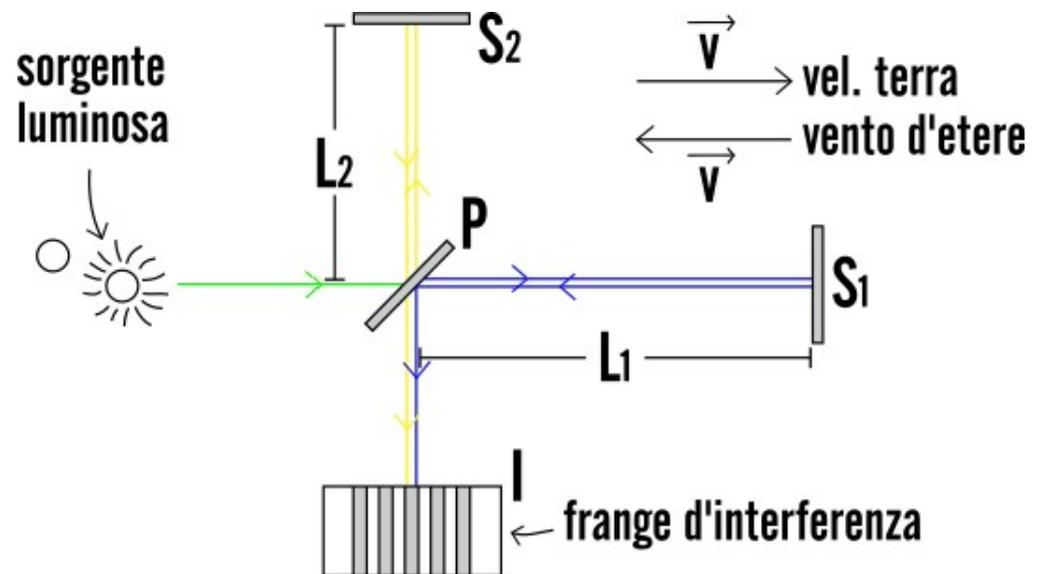


I principi della meccanica classica

Supponendo valida l'ipotesi dell'etere fermo rispetto al sole e che l'apparato sperimentale sia orientato con il braccio PS_1 parallelo alla velocità v_T della Terra, il raggio r_1 si muove con velocità $c - v$ nel tratto PS_1 , e con velocità $c + v$ nel tratto S_1P .

Il tempo t_1 impiegato da r_1 per compiere il tragitto di andata e ritorno (essendo $L_1=L$ la lunghezza del percorso) è dunque:

$$t_1 = \frac{L}{c + v} + \frac{L}{c - v} = \frac{2L}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$



I principi della meccanica classica

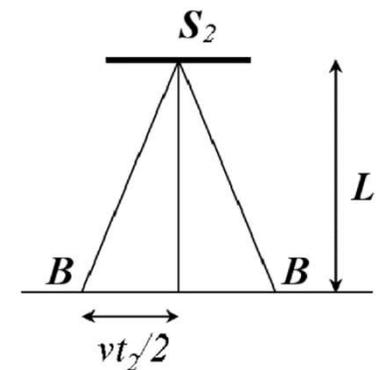
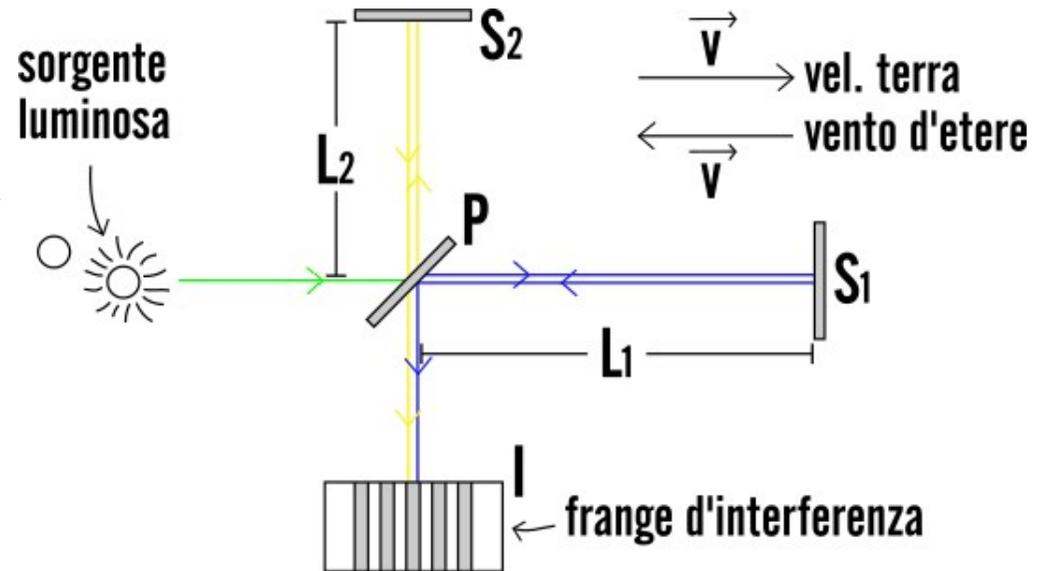
Il raggio r_2 , invece, si muove in direzione ortogonale alla velocità v . Il tratto effettivamente percorso dalla luce (tratto PS_2) non è dunque di lunghezza L , ma di lunghezza

$$\left[L^2 + \left(\frac{vt_2}{2} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Il tempo t_2 impiegato da r_2 per tragitto di andata e ritorno è dunque:

$$t_2 = \frac{2}{c} \left[L^2 + \left(\frac{vt_2}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \rightarrow t_2 = \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Ciò significa che in uno stesso intervallo di tempo, i due raggi compiono cammini ottici diversi dando luogo ad un fenomeno di interferenza



I principi della meccanica classica

$$\Delta\theta = \omega\Delta t = 2\pi \frac{t_1 - t_2}{T} \simeq \frac{L v^2}{c^2} \quad (v \ll c)$$

Operando una rotazione di $\pi/2$ dell'intero sistema, complessivamente si dovrebbe verificare uno spostamento delle frange di interferenza dovuto alla diversa orientazione dello strumento rispetto al moto della Terra. Questo spostamento avrebbe dovuto essere pari a $2\Delta\theta$.

Michelson e Morley realizzarono un cammino ottico $L \simeq 11$ m, e, utilizzando luce di lunghezza d'onda $\lambda = 550$ nm (luce verde), ci si aspettava uno spostamento delle frange di interferenza di circa $2\Delta\theta/(2\pi) = 0.4$.

L'esperimento venne ripetuto più volte durante il giorno e la notte, per tener conto della rotazione della terra su se stessa, più volte durante le stagioni, per tener conto della rivoluzione della terra intorno al sole. Il risultato era sempre lo stesso: nessuno spostamento delle frange di interferenza (il dispositivo aveva una sensibilità di 1/100 di frangia). Quindi nessun moto variabile della terra attraverso l'etere. Il risultato negativo fu la base sperimentale più importante che portò ad escludere l'esistenza di un riferimento (assoluto) riconducibile all'etere.

La cinematica relativistica

Ci furono vari tentativi per conservare il concetto di etere, finché, nel 1905 un esaminatore di brevetti dell'ufficio svizzero brevetti di Berna pubblicò un articolo:

Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento

L'articolo, e tutta la relatività ristretta, si basa su due principi fondamentali:

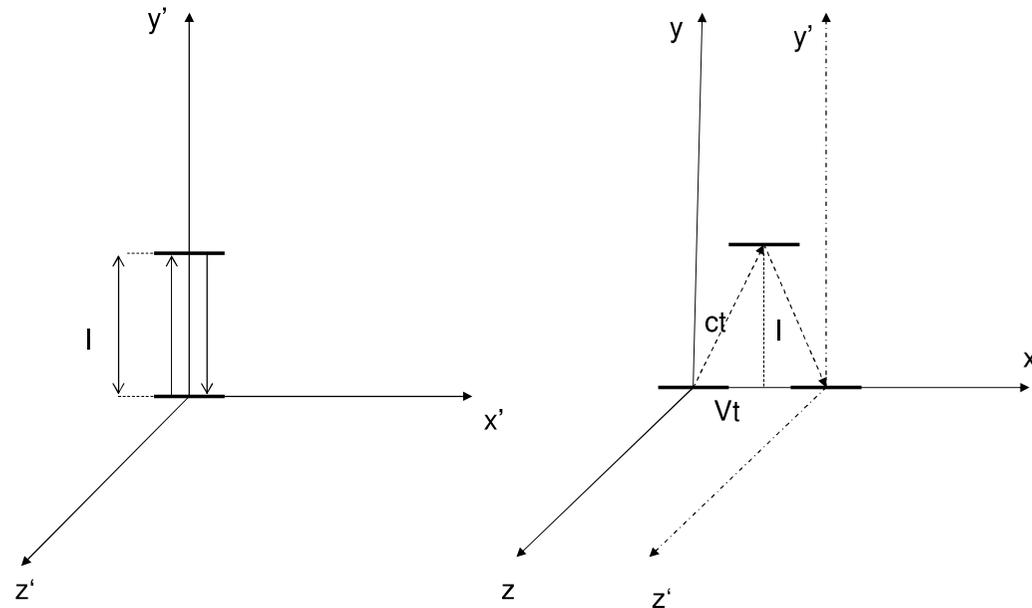
- 1) Principio di Relatività: le leggi della fisica sono invarianti da un sistema di riferimento inerziale a un altro sistema di riferimento inerziale.
- 2) Principio di costanza della velocità della luce: la velocità della luce nel vuoto ha lo stesso valore (c) in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Il principio di relatività ci permette di abbandonare l'idea dell'esistenza di un sistema di riferimento assoluto. Infatti essendo impossibile stabilire, per mezzo di una qualunque misura fisica, se un sistema sia in quiete o in moto assoluto, ha senso solo considerare il moto di un sistema relativo ad altri sistemi.

Dilatazione del tempo

Con la proprietà di invarianza della velocità della luce, si abbandona anche il concetto di tempo assoluto. Le conseguenze sono sorprendenti. Infatti la misura del tempo, inteso come ritmo degli orologi, e la misura della lunghezza dipendono dall'osservatore, ovvero dallo stato di moto relativo tra l'osservatore e gli elementi misurati.

Si può facilmente vedere come l'unità di tempo non è la stessa in due sistemi di riferimento in moto relativo prendendo in esame un fenomeno periodico: un raggio di luce nel vuoto intrappolato tra due specchi, posti a distanza l uno dall'altro, e in moto con velocità costante V rispetto ad un osservatore in S come in figura.



Dilatazione del tempo

Sia T' il periodo del fenomeno, cioè il tempo impiegato dal raggio di luce per partire e ritornare sullo stesso specchio in S' . Un osservatore in quiete in S' , misura un periodo $T' = 2l/c$. Per un osservatore in S , il tempo t necessario alla luce per arrivare sul secondo specchio si ottiene tenendo conto del moto degli specchi

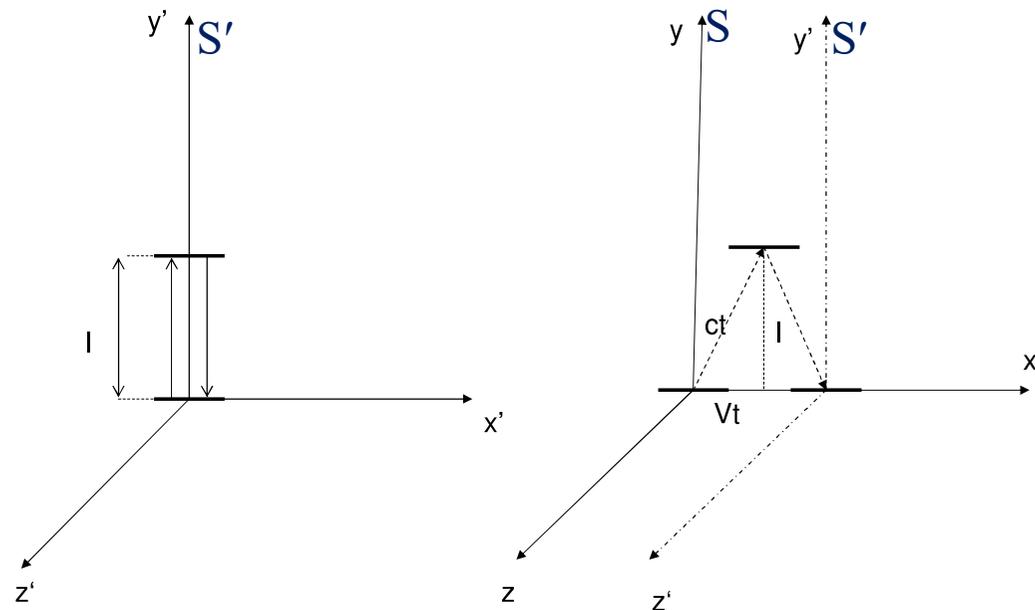
$$c^2 t^2 = V^2 t^2 + l^2 \rightarrow$$
$$t = \frac{l}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma \frac{l}{c}$$

Essendo $t = T/2$ si ha

$$T = 2\gamma \frac{l}{c} = \gamma T'$$

cioè il periodo osservato su S è più lungo di un fattore γ rispetto a quello osservato su S' .

Il periodo di un orologio che un osservatore vede in moto risulta dunque più lungo di un fattore γ , pertanto l'orologio scandisce il tempo più lentamente (dilatazione del tempo).

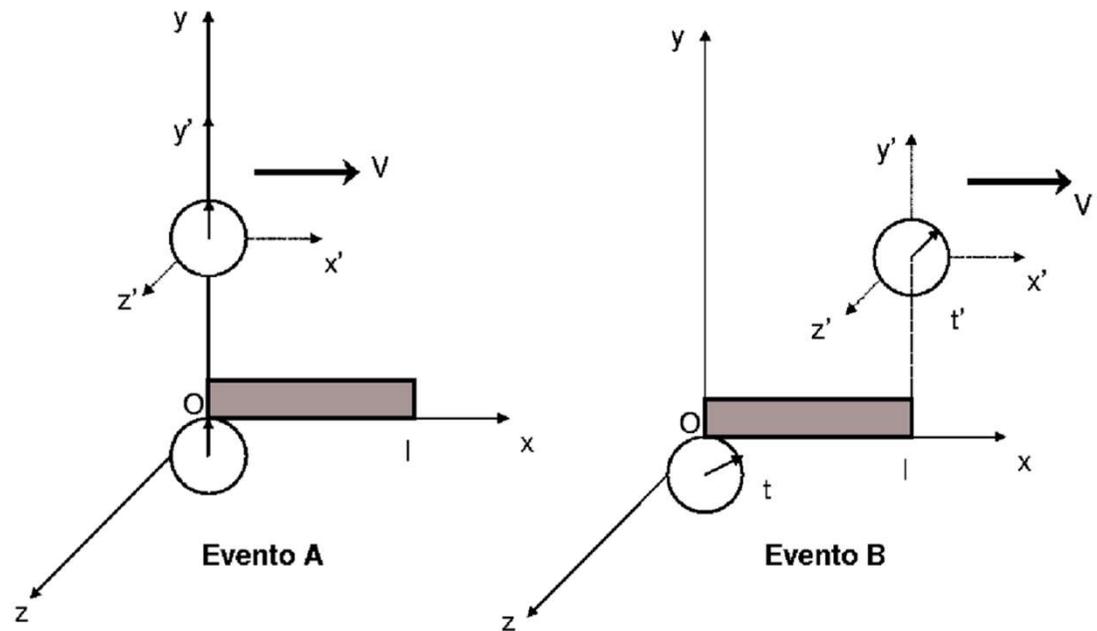


Contrazione delle lunghezze

Parallelamente al fenomeno di dilatazione del tempo si ha quello di contrazione della lunghezza. Per chiarire questo punto consideriamo due sistemi di riferimento inerziali S e S' con S' in moto con velocità V rispetto ad S parallelamente agli assi x e x' . I due orologi in S e S' sono sincronizzati e posti ad una estremità di una sbarra di lunghezza l ferma in S , come in figura A.

Nell'istante $t_A = t'_A = 0$ il sistema S' dotato di moto rettilineo uniforme con velocità V verso l'estremo destro della sbarra ha l'origine O' coincidente con O . Quando il sistema S' è arrivato all'estremo destro della sbarra (B), l'orologio in S segna un tempo $t_B = l/V$, mentre l'orologio in S' segna un tempo

$$t'_B = \frac{t_B}{\gamma} = \frac{l}{\gamma V}$$



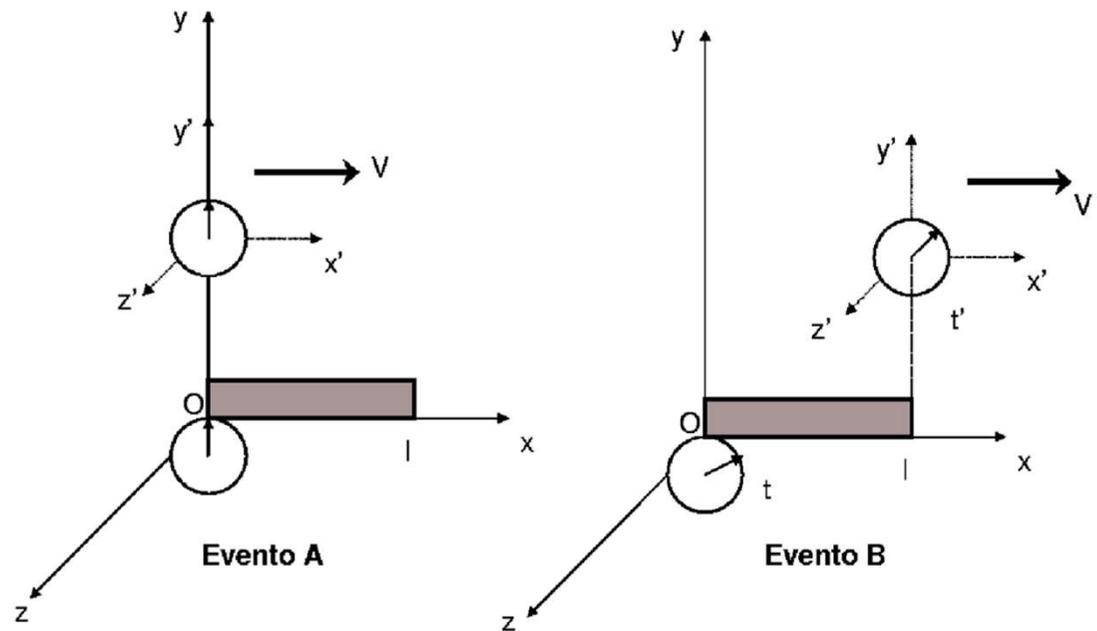
Contrazione delle lunghezze

$$t'_B = \frac{t_B}{\gamma} = \frac{l}{\gamma V}$$

Dal punto di vista di un osservatore in quiete su S' , il sistema S e la sbarra si muovono con velocità $-V$. Esso misurerà la lunghezza della sbarra l' come la distanza percorsa dal sistema S in moto con velocità $-V$, in un tempo t'_B

$$l' = V t'_B = \frac{l}{\gamma}$$

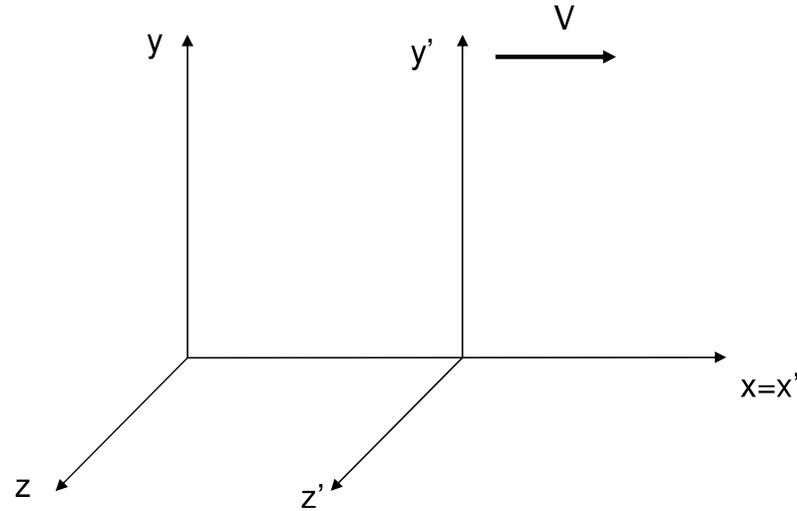
L'osservatore in S' misurerà pertanto una lunghezza minore per la sbarretta (contrazione delle lunghezze).



Le trasformazioni di Lorentz

Le relazioni spazio-temporali tra due sistemi di riferimento inerziali in moto non possono essere più descritte dalle trasformazioni di Galileo.

Al fine di ricavare le nuove trasformazioni, assumiamo che lo spazio-tempo sia omogeneo e scegliamo due sistemi tali che gli assi x e x' siano sovrapposti e che la velocità relativa sia diretta parallelamente a questi, come in figura.



$$\cancel{x = x' + v t}$$

$$\cancel{t = t'}$$

In generale
dobbiamo risolvere
il seguente sistema

$$x = \mathbf{A} x' + \mathbf{B} c t'$$

$$c t = \mathbf{E} x' + \mathbf{D} c t'$$

Le trasformazioni di Lorentz

Consideriamo un punto P che si muove alla velocità della luce in S e che in un tempo dt si sposta di un tratto dl :

$$dl^2 = c^2 dt^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$dx^2 - c^2 dt^2 = -dy^2 - dz^2$$

Lo stesso punto si muove con la stessa velocità c anche in S'

$$dx'^2 - c^2 dt'^2 = -dy'^2 - dz'^2 = dx^2 - c^2 dt^2$$

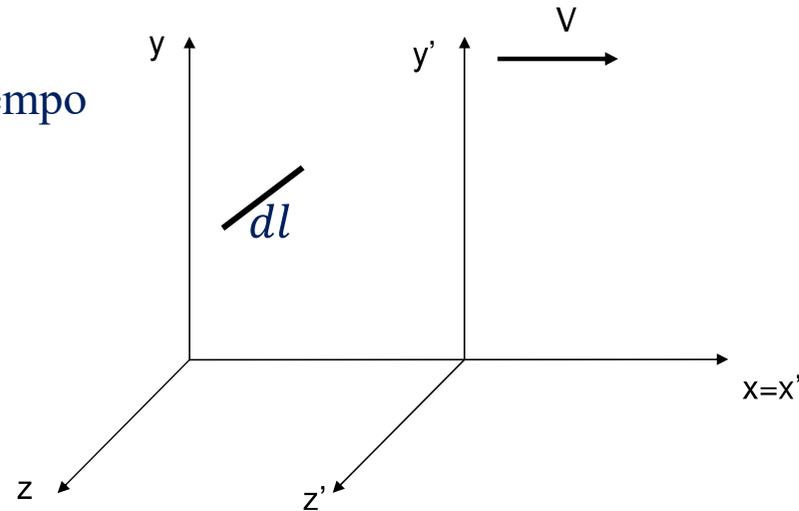
$$x = A x' + B c t'$$

$$c t = E x' + D c t'$$

$$dx^2 - c^2 dt^2 =$$

$$(A^2 - E^2)dx'^2 + (B^2 - D^2)c^2 dt'^2 + 2(AB - ED)cdx' dt' = dx'^2 - c^2 dt'^2$$

$$\longrightarrow A^2 - E^2 = 1; \quad D^2 - B^2 = 1.; \quad AB - ED = 0$$



Le trasformazioni di Lorentz

$$\Rightarrow \begin{cases} A^2 - E^2 = 1 \\ D^2 - B^2 = 1 \\ A B = E D \end{cases}$$

Se utilizziamo

$$A = \cosh \varphi, \quad E = \sinh \varphi \quad (\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi = 1)$$

$$D = \cosh \varphi', \quad B = \sinh \varphi' \quad (\cosh^2 \varphi' - \sinh^2 \varphi' = 1)$$

$$A B = E D \Rightarrow \sinh(\varphi' - \varphi) = 0 \Rightarrow \varphi' = \varphi$$

Le trasformazioni di Lorentz

$$A = \cosh \varphi, \quad E = \sinh \varphi \quad D = \cosh \varphi, \quad B = \sinh \varphi$$

$$x = A x' + B c t'$$

$$c t = E x' + D c t'$$

Inoltre se $x' = 0 \Rightarrow$

$$x = c t' \sinh \varphi$$

$$c t = c t' \cosh \varphi$$

quindi

$$v = \frac{dx}{dt} = c \tanh \varphi$$

definiamo

$$\beta = \frac{v}{c} = \tanh \varphi$$

$$\Rightarrow \sinh \varphi = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\cosh \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma$$

Le trasformazioni di Lorentz

Si ottiene quindi alla fine

**Fattore di Lorentz
relativistico di
velocità**

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

**Fattore di Lorentz
relativistico di
massa**

$$ct = \gamma (\beta x' + ct')$$

$$x = \gamma (x' + \beta c t')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$ct' = \gamma (-\beta x + ct)$$

$$x' = \gamma (x - \beta c t)$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

Le trasformazioni di Lorentz

Le trasformazioni di Lorentz possono essere scritte in forma matriciale come

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} \rightarrow X' = [A]X$$

Il vettore X si chiama anche **quadrivettore posizione tempo**. Si ha anche che

$$X = [A]^{-1}X'$$

con

$$[A]^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Le trasformazioni delle velocità

$$x = \gamma (x' + \beta c t') \Rightarrow dx = \gamma (dx' + \beta c dt')$$

$$t = \gamma \left(\frac{\beta}{c} x' + t' \right) \Rightarrow dt = \gamma \left(\frac{\beta}{c} dx' + dt' \right)$$

$$\Rightarrow V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + \beta c dt'}{\frac{\beta}{c} dx' + dt'}$$

$$\Rightarrow V_x = \frac{V_x' + v}{1 + \frac{\beta}{c} V_x'} \quad \text{invece di} \quad \cancel{V_x = V_x' + v}$$

Analogamente

$$V_y = \frac{\frac{V_y'}{\gamma}}{1 + \frac{\beta}{c} V_x'}$$

$$V_z = \frac{\frac{V_z'}{\gamma}}{1 + \frac{\beta}{c} V_x'}$$

Contrazione delle lunghezze e dilatazione dei tempi

Abbiamo visto che il periodo misurato su S di un orologio solidale con S' è più lungo di un fattore γ rispetto a quello misurato su S' per il quale l'orologio non si muove. Pertanto, se indichiamo con Δt_p l'intervallo di tempo proprio, cioè quello misurato nel sistema di riferimento rispetto al quale l'orologio è in quiete, possiamo scrivere che un qualunque osservatore che vede l'orologio in moto, misura

$$dt = \gamma \Delta t_p$$

Inoltre per la contrazione delle lunghezze abbiamo visto che un osservatore misura una lunghezza minore rispetto all'osservatore per cui la sbarretta è a riposo. Anche qui possiamo quindi scrivere

$$l = \frac{l_p}{\gamma}$$

con l_p la lunghezza propria.

Esempio sulla dilatazione dei tempi: il GPS (Global positioning system)

14000 Km/h in orbit

$$\beta \approx 1.3 \cdot 10^{-5}$$

$$\gamma \approx 1.000000000000084$$

Time Dilation

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

Time and Space Error

$$\Delta t \approx 10 \mu s \text{ al giorno}$$

$$\Delta x \approx 2.5 \text{ Km}$$

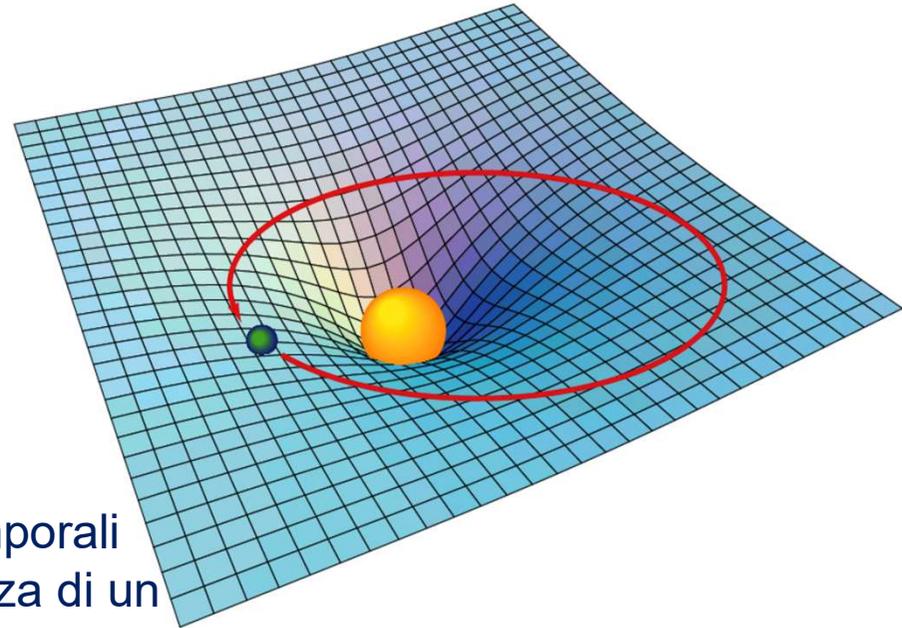


Esempio sulla dilatazione dei tempi: il GPS (Global positioning system)

In realtà c'è un altro effetto dovuto alla relatività generale: i campi gravitazionali cambiano sia la velocità degli orologi, sia la propagazione dei segnali radio.

Un campo gravitazionale curva lo spazio-tempo, ovvero, gli intervalli temporali e spaziali sono deformati dalla presenza di un campo gravitazionale.

- Gli orologi a Terra risentono di un campo gravitazionale più grande di quello che sentono i satelliti.
- L'effetto è più grande, e di segno opposto, rispetto a quello della relatività ristretta: 45.7 μ s al giorno: senza correzione, 15 km di errore!
- La soluzione: Gli orologi dei satelliti vanno volutamente ad una velocità diversa (quindi non sono uguali a quelli a Terra!).



Esempio sulla dilatazione dei tempi: i muoni

•Un muone è una specie di elettrone pesante creato dall'interazione tra i raggi cosmici provenienti dallo spazio e le molecole dello strato superiore dell'atmosfera (a circa **20 km** dal suolo)

•I muoni sono instabili e la loro vita media è circa **2.2 μs** nel loro sistema di riferimento => dovrebbero viaggiare per circa **ct ~ 660 m**

•Tuttavia in realtà viaggiano per distanze molto maggiori poiché noi li osserviamo anche sulla Terra

•Spiegazione: I muoni vivono più a lungo a causa della dilatazione del tempo

•Se $\beta = 0.9995 \Rightarrow \gamma \approx 32$: la loro vita media vista dalla Terra è ~ $2.2 \mu\text{s} \times 32 \approx 70 \mu\text{s}$ in modo da poter viaggiare per circa **20 km!**

Esempio sulla dilatazione dei tempi: i muoni

Questo effetto (allungamento della vita media dei muoni) è stato riprodotto anche nell'acceleratore di particelle del CERN utilizzando un fascio proveniente dal Proton Synchrotron. I risultati sono stati pubblicati sulla rivista Nature nel 1977.

Nature Vol. 268 28 July 1977 301

articles

Measurements of relativistic time dilatation for positive and negative muons in a circular orbit

J. Bailey Daresbury Laboratory, Warrington, Lancashire, UK	E. Picasso European Organization for Nuclear Research, Geneva
K. Borer Physikalisches Institut, Universität Bern, Bern, Switzerland	W. von Ruden Institut für Physik der Universität Mainz, Mainz, FRG
F. Combley Department of Physics, University of Sheffield, Sheffield, UK	F. J. M. Farley Royal Military College of Science, Shrivenham, Wiltshire, UK
H. Drumm European Organization for Nuclear Research, Geneva	J. H. Field European Organization for Nuclear Research, Geneva
F. Krienen European Organization for Nuclear Research, Geneva	W. Flegel European Organization for Nuclear Research, Geneva
F. Lange Institut für Physik der Universität Mainz, Mainz, FRG	P. M. Hattersley Department of Physics, University of Birmingham, Birmingham, UK

The lifetimes of both positive and negative relativistic ($\gamma = 29.33$) muons have been measured in the CERN Muon Storage Ring with the results

$$\tau^+ = 64.419 (58) \mu\text{s}, \quad \tau^- = 64.368 (29) \mu\text{s}$$

The value for positive muons is in accordance with special relativity and the measured lifetime at rest: the Einstein time dilation factor agrees with experiment with a fractional error of 2×10^{-3} at 95% confidence. Assuming special relativity, the mean proper lifetime for μ^- is found to be

$$\tau_0^- = 2.1948 (10) \mu\text{s}$$

the most accurate value reported to date. The agreement of this value with previously measured values of τ_0^+ confirms CPT invariance for the weak interaction in muon decay.

$$\sim 2.2 \mu\text{s} \times 29.33 \approx 64.5 \mu\text{s}!$$

Invariante relativistico

Prendiamo in esame due sistemi di riferimento inerziali S e S'; S' si muove di moto rettilineo uniforme con velocità V lungo l'asse x e coincide con S per $t = 0$. Consideriamo le quantità

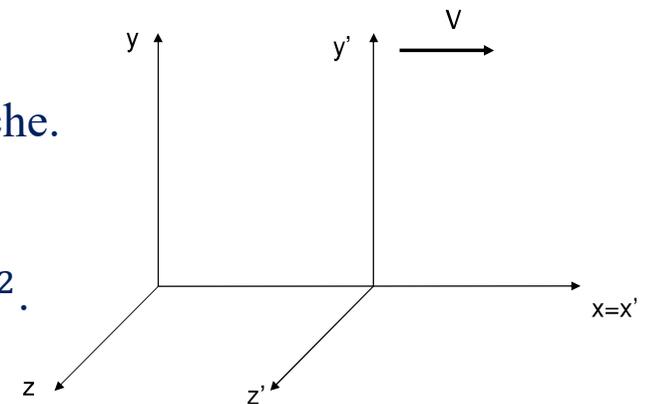
$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 \quad s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2$$

Usando le trasformazioni di Lorentz si ottiene

$$\begin{aligned} s^2 &= \gamma^2(x' + \beta ct')^2 + y'^2 + z'^2 - \gamma^2(ct' + \beta x')^2 \\ &= \gamma^2 x'^2(1 - \beta^2) + y'^2 + z'^2 - \gamma^2 c^2 t'^2(1 - \beta^2) = \\ & \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = s'^2 \end{aligned}$$

Quindi s^2 è invariante rispetto alle trasformazioni relativistiche.

Dato quindi il quadrivettore posizione tempo (x, y, z, ct) , il suo invariante (rispetto al sistema di riferimento) è pari a s^2 .



Dinamica relativistica

La seconda legge della dinamica continua ad essere valida ma deve essere scritta come:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

La massa m non è più una costante del moto, ma dipende dall'energia. Analizzando un urto elastico tra due masse, si può ottenere che la massa dipende dalla velocità. In un qualunque sistema di riferimento la massa di una particella che possiede una velocità \vec{v} viene ad essere pari a

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0$$

dove m_0 è la massa della particella rispetto ad un sistema di riferimento in cui essa è ferma.

Massa relativistica

$$m = \gamma m_0$$

Questa relazione, trovata a partire dalle trasformazioni di Lorentz, era in realtà già nota prima dell'uscita della teoria della relatività.

Nel 1901 Kaufmann fece un esperimento misurando la massa di una particella al variare della sua velocità (la massa può essere determinata, ad esempio, misurando il moto di una carica in un campo elettrico e magnetico, tipo spettrometro di massa).

Si può quindi scrivere la seconda legge della dinamica come

$$\vec{F} = \frac{d(\gamma m_0 \vec{v})}{dt}$$

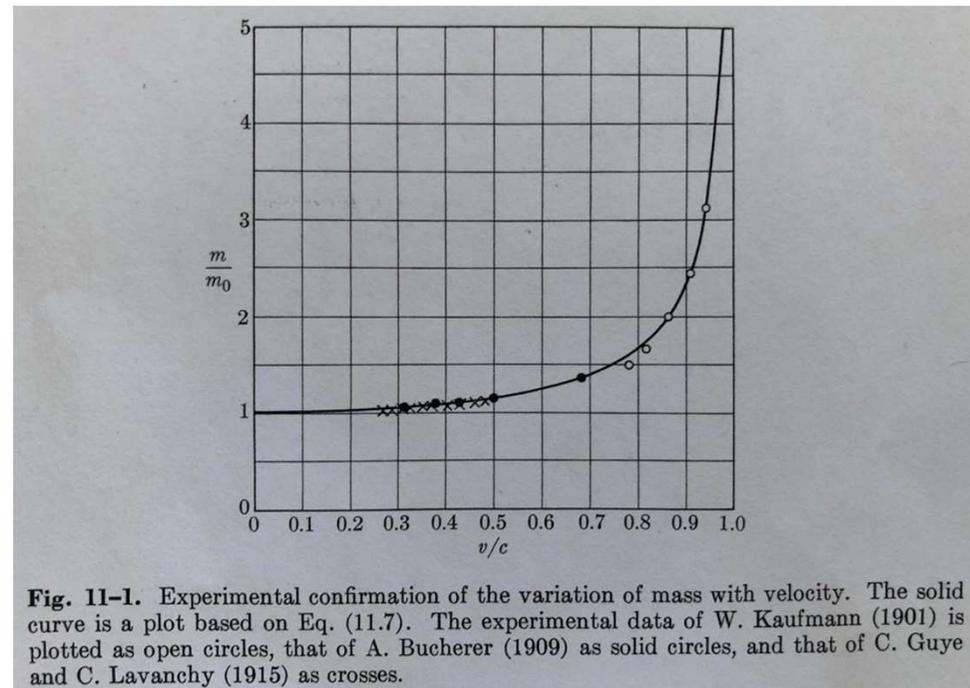


Fig. 11-1. Experimental confirmation of the variation of mass with velocity. The solid curve is a plot based on Eq. (11.7). The experimental data of W. Kaufmann (1901) is plotted as open circles, that of A. Bucherer (1909) as solid circles, and that of C. Guye and C. Lavanchy (1915) as crosses.

Lavoro ed energia cinetica

Poiché la massa dipende dalla velocità, possiamo scrivere

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Il lavoro esercitato dalla forza deve essere pari alla variazione dell'energia cinetica. Quindi

$$K = \int_{v_0=0}^v F dx = \int_{v_0=0}^v \left(\frac{dm}{dt} v + m \frac{dv}{dt} \right) dx = \int_{v_0=0}^v (v^2 dm + m v dv)$$

Poiché

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow m^2(c^2 - v^2) = m_0^2 c^2 \rightarrow 2m(c^2 - v^2)dm - 2vm^2 dv = 0$$

$$c^2 dm = v^2 dm + v m dv$$

Lavoro ed energia cinetica

Poiché la massa dipende dalla velocità, possiamo scrivere

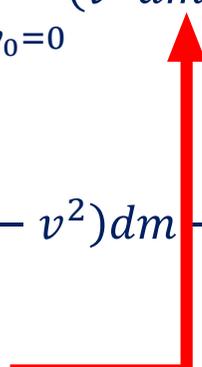
$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Il lavoro esercitato dalla forza deve essere pari alla variazione dell'energia cinetica. Quindi

$$K = \int_{v_0=0}^v F dx = \int_{v_0=0}^v \left(\frac{dm}{dt} v + m \frac{dv}{dt} \right) dx = \int_{v_0=0}^v (v^2 dm + m v dv)$$

Poiché

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow m^2(c^2 - v^2) = m_0^2 c^2 \rightarrow 2m(c^2 - v^2)dm - 2vm^2 dv = 0$$

$$c^2 dm = v^2 dm + v m dv$$


Lavoro ed energia cinetica

$$K = \int_{v_0=0}^v c^2 dm = m(v)c^2 - m(v_0 = 0)c^2 = mc^2 - m_0c^2$$

L'energia cinetica guadagnata dalla massa risulta pertanto composta dalla differenza di due termini: il primo rappresenta l'energia totale, il secondo quella a riposo, associata alla massa del corpo stesso. Possiamo quindi scrivere

$$E = K + m_0c^2 = mc^2$$

Quale è il significato dell'energia a riposo? Sappiamo che un oggetto fermo è in realtà composto da molecole, atomi, nuclei, elettroni, etc., che si trovano in uno stato di moto. Le loro energie, cinetica e potenziale, di qualunque natura, che costituiscono l'energia interna, contribuiscono alla massa a riposo.

Il modo più semplice per verificare tale affermazione potrebbe essere quello di misurare la massa a seguito di un riscaldamento o di una trasformazione chimica, accompagnate da un assorbimento di calore Q o da un rilascio di energia ΔE . Tuttavia la variazione di massa corrispondente, pari a Q/c^2 o $\Delta E/c^2$ è troppo piccola per essere misurata sperimentalmente.

Energia cinetica

Se facciamo uno sviluppo in serie dell'energia cinetica fermandoci al primo ordine, otteniamo

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \simeq \frac{m_0}{1 - \frac{v^2}{2c^2} + \dots} \simeq m_0 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} \right)$$

Quindi

$$K = mc^2 - m_0c^2 \simeq m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 - m_0c^2 = \frac{1}{2}m_0v^2$$

che coincide con l'energia cinetica classica non relativistica

Trasformazione di energia e quantità di moto

Consideriamo un sistema di riferimento S' in cui una massa è ferma (m_0). In un sistema di riferimento S :

$$p_x = mV_x = \gamma m_0 V_x = \gamma m_0 \frac{dx}{dt} = \gamma m_0 \frac{dx}{dt'} \frac{dt'}{dt} = m_0 \frac{dx}{dt'}$$

poiché $\gamma = dt/dt'$. Stesse relazioni si ottengono per p_y e p_z . Inoltre

$$\frac{E}{c} = \gamma m_0 c = \frac{dt}{dt'} m_0 c = m_0 \frac{d(ct)}{dt'}$$

Si ha quindi:

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ E/c \end{pmatrix} = m_0 \frac{d}{dt'} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}$$

Trasformazione di energia e quantità di moto

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ E/c \end{pmatrix} = m_0 \frac{d}{dt'} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}$$

Poiché dt' è il tempo proprio, in quanto è il tempo dove la massa vale m_0 , esso è invariante nel passaggio tra due sistemi di riferimento. Anche m_0 è invariante. Quindi $(p_x, p_y, p_z, E/c)$ si comporta come $(dx, dy, dz, d(ct))$.

Poiché quest'ultimo si trasforma secondo Lorentz, allora

$$\begin{pmatrix} p_x' \\ p_y' \\ p_z' \\ E'/c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ E/c \end{pmatrix}$$

L'invariante per il quadrivettore impulso energia è

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2$$

Trasformazione delle forze

Supponiamo il caso semplice in cui una particella è a riposo in S' ($dt = \gamma dt'$)

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \vec{F}' = \frac{d\vec{p}'}{dt'}$$

Inoltre, per le trasformazioni di energia e quantità di moto

$$p_x = \gamma p'_x - \beta \gamma E_0 \rightarrow dp_x = \gamma dp'_x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_x = \frac{dp_x}{dt} = \frac{dp_x}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{dp_x}{dt'} = \frac{1}{\gamma} \frac{\gamma dp'_x}{dt'} = F'_x \\ F_{y,z} = \frac{dp_{y,z}}{dt} = \frac{dp_{y,z}}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{dp_{y,z}}{dt'} = \frac{1}{\gamma} \frac{dp'_{y,z}}{dt'} = \frac{F'_{y,z}}{\gamma} \end{array} \right.$$

Trasformazione di carica e densità di corrente

Per un sistema di riferimento in cui la carica è a riposo

$$\rho_0 = \frac{dQ}{d\tau_0} = \frac{dQ}{dx_0 dy_0 dz_0}$$

Poiché la carica è un invariante del moto, in un sistema che si muove con velocità \vec{v} si ha

$$\rho = \frac{dQ}{d\tau} = \frac{dQ}{dx dy dz} = \frac{dQ}{d\left(\frac{x_0}{\gamma}\right) dy_0 dz_0} = \gamma \rho_0$$

Si può osservare che ρ si trasforma come la massa ($m = \gamma m_0$), quindi ρc si comporta come $cm = E/c$.

Trasformazione di carica e densità di corrente

La densità di corrente vale

$$\vec{J} = nq\vec{v} = \rho\vec{v}$$

in quanto n rappresenta i portatori di carica per unità di volume e q è la carica del singolo portatore. Quindi osservo che $(J_x, J_y, J_z, \rho c)$ si comporta come $(p_x, p_y, p_z, E/c)$. Questo si chiama quadrivettore densità di corrente e si trasforma secondo Lorentz come il quadrivettore energia quantità di moto:

$$\begin{pmatrix} J_x' \\ J_y' \\ J_z' \\ c\rho' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \\ c\rho \end{pmatrix}$$

Trasformazione dei campi

Consideriamo la forza di Lorentz che agisce su una carica in moto:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Supponiamo una carica a riposo in S' dove può agire quindi soltanto un campo elettrico

$$\begin{cases} F'_x = qE'_x \\ F'_y = qE'_y \\ F'_z = qE'_z \end{cases}$$

In S abbiamo la forza di Lorentz $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ con $\vec{v} = (v, 0, 0)$

$$\begin{cases} F_x = qE_x \\ F_y = q(E_y - vB_z) \\ F_z = q(E_z + vB_y) \end{cases}$$

Trasformazione dei campi

Date le trasformazioni delle forze che abbiamo visto prima:

$$\begin{cases} F_x = F'_x \\ F_y = \frac{F'_y}{\gamma} \\ F_z = \frac{F'_z}{\gamma} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma(E_y - vB_z) \\ E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \end{cases}$$

e analogamente

$$\begin{cases} E_x = E'_x \\ E_y = \gamma(E'_y + vB'_z) \\ E_z = \gamma(E'_z - vB'_y) \end{cases}$$

Con un ragionamento simile si possono ottenere anche le trasformazioni di \vec{B}

Trasformazione dei campi

da S' a S

$$\begin{cases} E_x = E'_x \\ E_y = \gamma(E'_y + vB'_z) \\ E_z = \gamma(E'_z - vB'_y) \end{cases} \quad \begin{cases} B_x = B'_x \\ B_y = \gamma(B'_y - vE'_z/c^2) \\ B_z = \gamma(B'_z + vE'_y/c^2) \end{cases}$$

da S a S'

$$\begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma(E_y - vB_z) \\ E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \end{cases} \quad \begin{cases} B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma(B_y + vE_z/c^2) \\ B'_z = \gamma(B_z - vE_y/c^2) \end{cases}$$

Trasformazione dei potenziali scalare e vettore

Introduciamo l'operatore dalembertiano come

$$\square^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Si può dimostrare che il dalembertiano non dipende dal sistema di riferimento (è invariante per trasformazioni relativistiche): $\square^2 = \square'^2$.

Possiamo scrivere le equazioni del potenziale scalare e vettore

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{J} \\ \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

come

$$\begin{aligned}\square^2 \vec{A} &= -\mu_0 \vec{J} \\ \square^2 \phi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

Trasformazione dei potenziali scalare e vettore

Le equazioni del potenziale scalare e vettore le possiamo riscrivere come:

$$\begin{aligned}\square^2 \vec{A} &= -\mu_0 \vec{J} \\ \square^2(\phi/c) &= -\frac{\rho}{c\epsilon_0} = -\mu_0(c\rho)\end{aligned}$$

Poiché, come detto prima, $\square^2 = \square'^2$, osserviamo che il quadrivettore $(A_x, A_y, A_z, \phi/c)$ si trasforma come il quadrivettore $(J_x, J_y, J_z, \rho c)$ e quindi

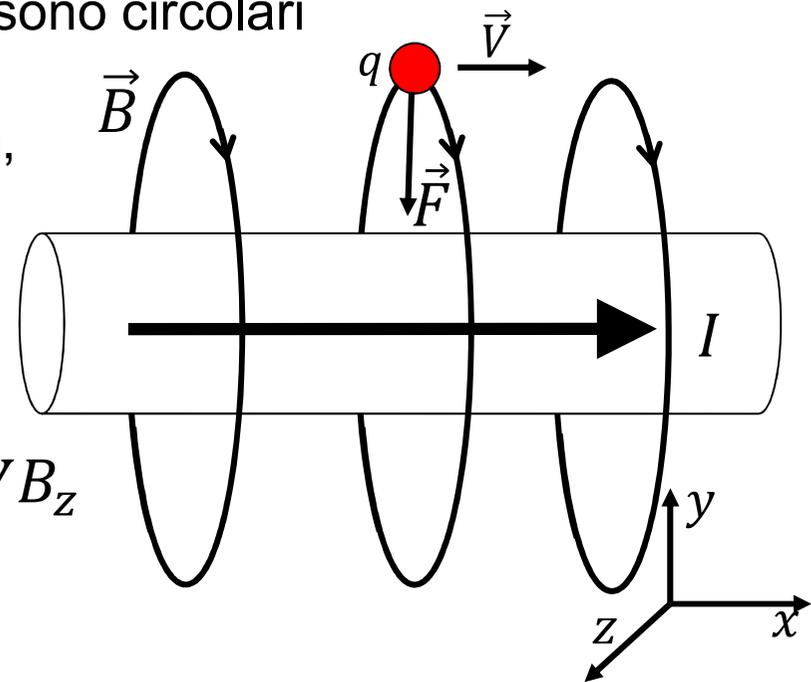
$$\begin{pmatrix} A_x' \\ A_y' \\ A_z' \\ \phi'/c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \\ \phi/c \end{pmatrix}$$

Campi visti da differenti sistemi di riferimento

Consideriamo un filo conduttore molto lungo e rettilineo fermo in S che trasporta una corrente I che, per semplicità, supponiamo nascere da cariche positive che si muovono con velocità \vec{V} .

Le linee di forza del campo magnetico sono circolari

Consideriamo una carica q fuori dal filo, che si muove con velocità \vec{V}



$$\vec{E} = 0 \rightarrow \vec{F} = q\vec{V} \times \vec{B} \rightarrow F_y = -qVB_z$$

Campi visti da differenti sistemi di riferimento

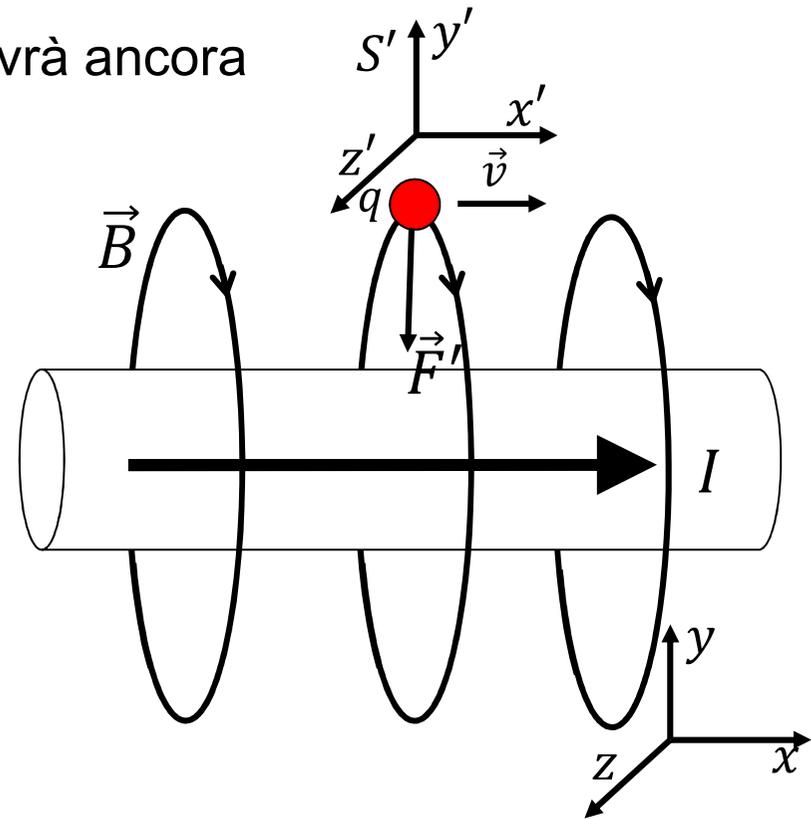
Consideriamo ora un osservatore in S' , dove q non si sta muovendo:

$$V' = 0 \rightarrow \vec{v} = \vec{V}$$

In S' : $\vec{B}' = 0$. Tuttavia un osservatore dovrà ancora vedere una forza attrattiva \vec{F}' .

Se consideriamo le trasformazioni dei campi: $E'_y = -\gamma v B_z$

$$F'_y = qE'_y = -\gamma qv B_z = \gamma F_y$$



Campi elettromagnetici prodotti da una carica in moto

Una carica in moto non relativistico produce un campo magnetico che si può ottenere dalla prima legge di Laplace:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\vec{J} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} d\tau'$$

Supponiamo di avere una corrente in conduttore con n cariche per unità di volume:

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d$$

Se prendiamo un volume infinitesimo $d\tau'$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{nq\vec{v}_d \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} d\tau'$$

Campi elettromagnetici prodotti da una carica in moto

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v}_d \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} nd\tau = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v}_d \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} dN$$

Questo rappresenta il campo che agisce sulle cariche dN . Il campo \vec{B} che agisce su una carica puntiforme con velocità generica \vec{v} è quindi

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3}$$

Poiché

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overline{\Delta\vec{r}}}{|\Delta\vec{r}|^3}$$

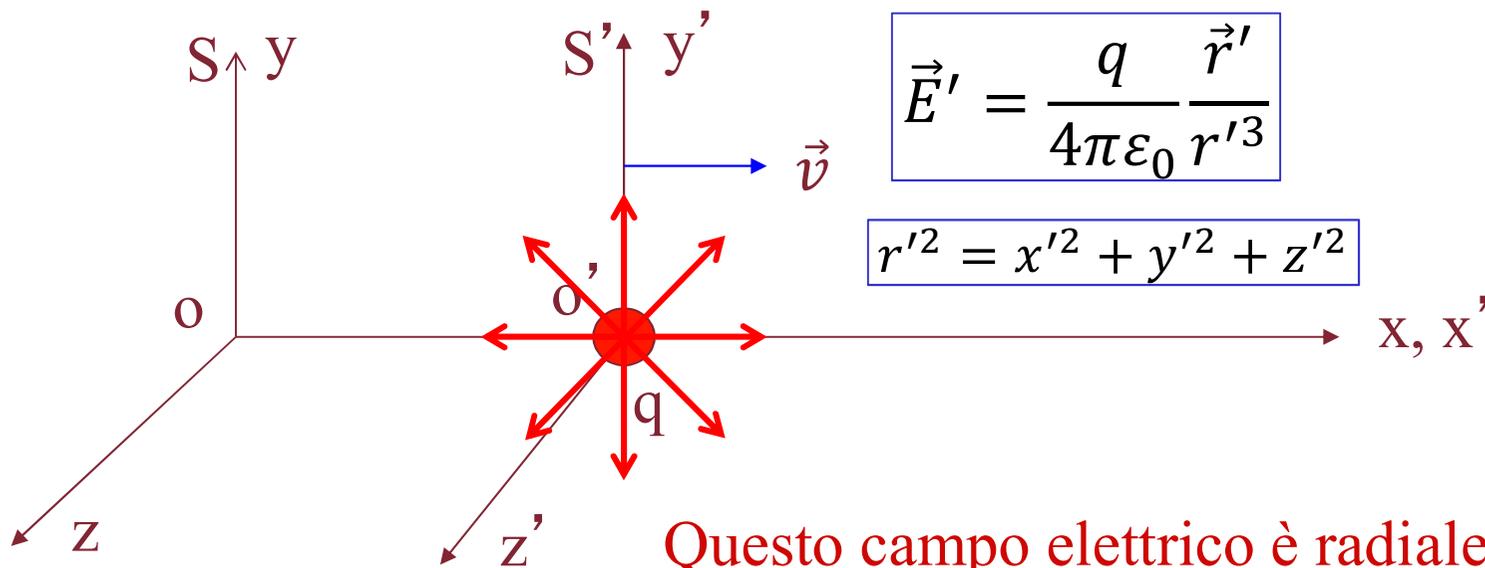
Allora ($\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$)

$$\vec{B} = \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2}$$

Cosa succede se abbiamo velocità relativistiche?

Campi elettromagnetici prodotti da una carica in moto

Mettiamoci in un sistema di riferimento solidale con la carica in moto S'



$$\vec{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}'}{r'^3}$$

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

Questo campo elettrico è radiale con simmetria sferica

$$\vec{B}' = 0$$

Campi elettromagnetici prodotti da una carica in moto

Trasformiamo i campi elettrici e magnetici e le coordinate da S' a S:

$$E_x = E'_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x'}{r'^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma(x - vt)}{[\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$

$$E_y = \gamma E'_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma y'}{r'^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma y}{[\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$

$$E_z = \gamma E'_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma z'}{r'^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma z}{[\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$

$$B_x = 0$$

$$B_y = -vE_z/c^2$$

$$B_z = vE_y/c^2$$



$$B_{\text{azimuth}} = \frac{v}{c^2} E_{\text{rad}}$$

→ simmetria y-z

Per $t = 0$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma \vec{r}}{[\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$

Campi elettromagnetici prodotti da una carica in moto

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma \vec{r}}{(\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

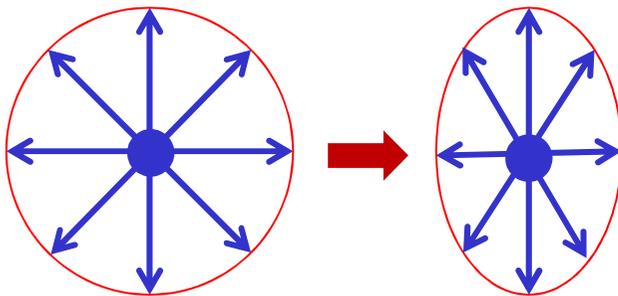
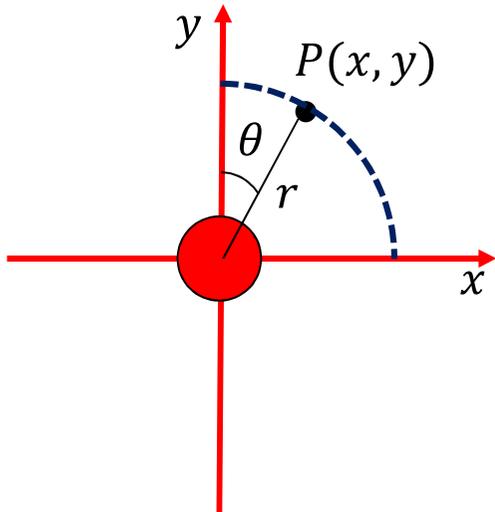
Consideriamo $z = 0$ (piano x-y) ed usiamo le relazioni:

$$x = r \sin \theta, \quad y = r \cos \theta$$

$$|\vec{E}| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\gamma}{(\cos^2 \theta + \gamma^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}$$

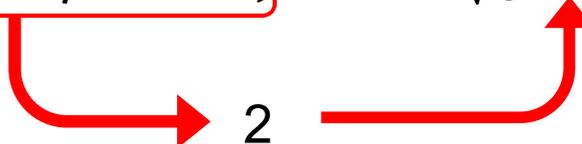
$$|\vec{E}|_{max} \text{ se } \theta = 0: \quad |\vec{E}|_{max} = \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$|\vec{E}|_{min} \text{ se } \theta = \pi/2: \quad |\vec{E}|_{min} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 \gamma^2}$$



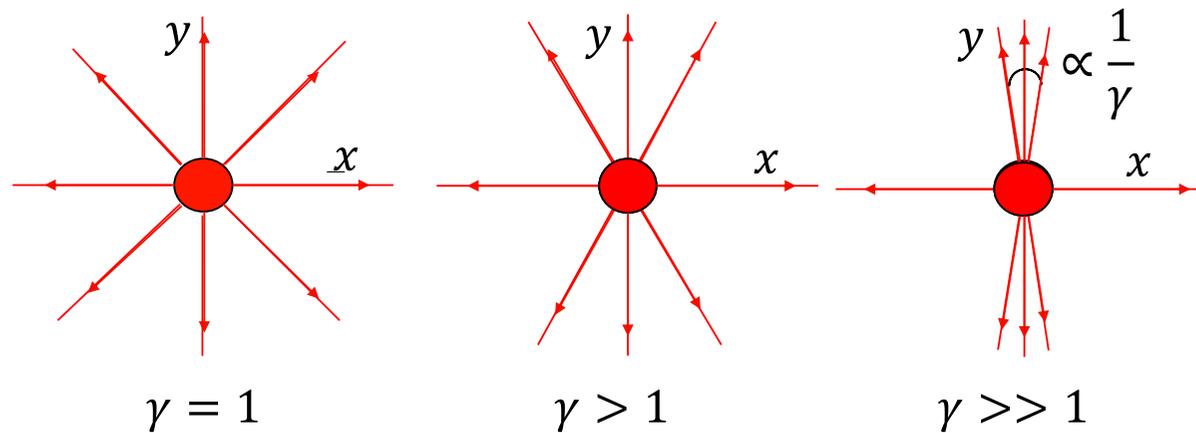
Campi elettromagnetici prodotti da una carica in moto

$$|\vec{E}| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\gamma}{(\cos^2 \theta + \gamma^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} = \frac{|\vec{E}|_{max}}{\sqrt{8}} \simeq \frac{|\vec{E}|_{max}}{3}$$

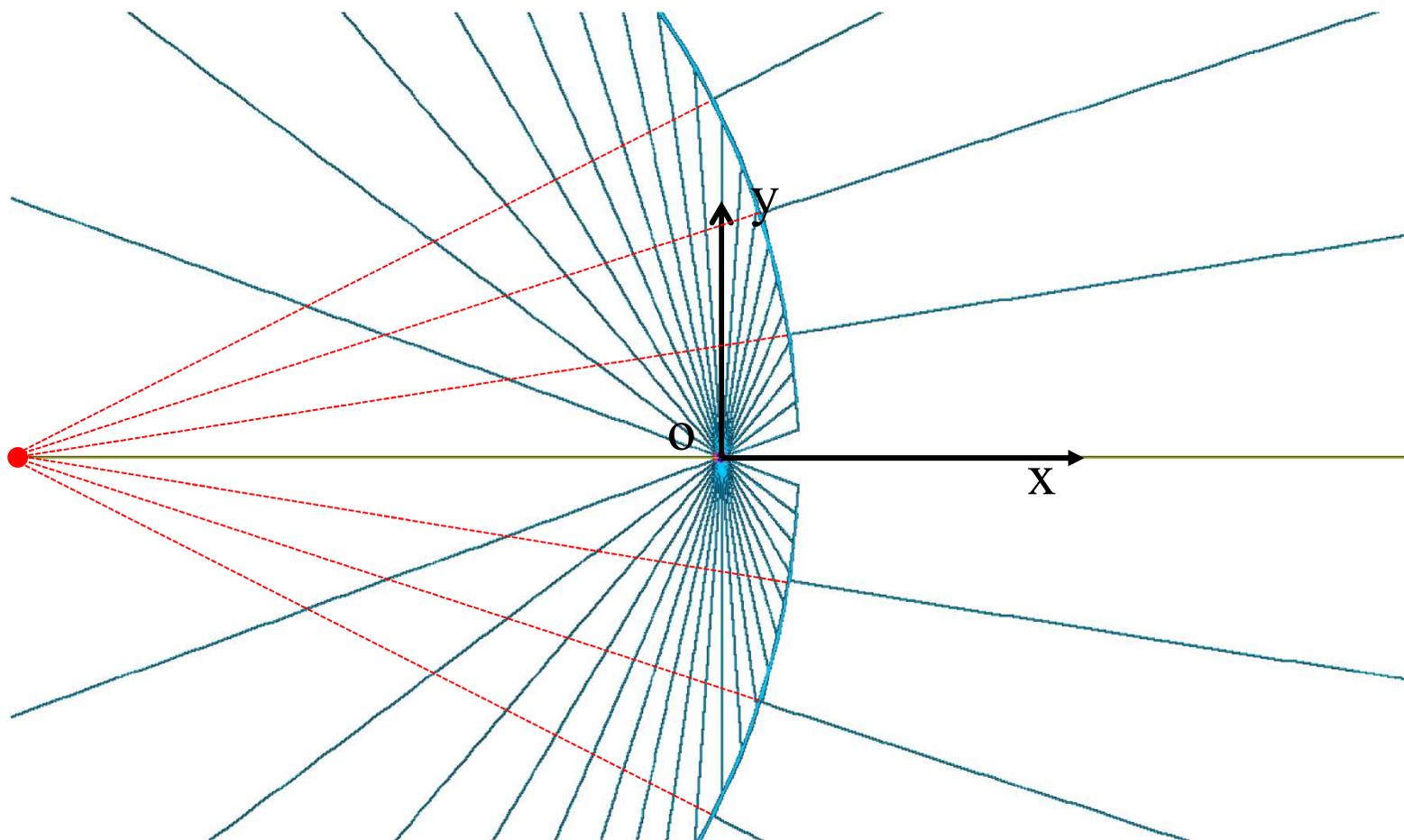


If $\gamma \gg 1 \rightarrow \theta \simeq \frac{1}{\gamma}$

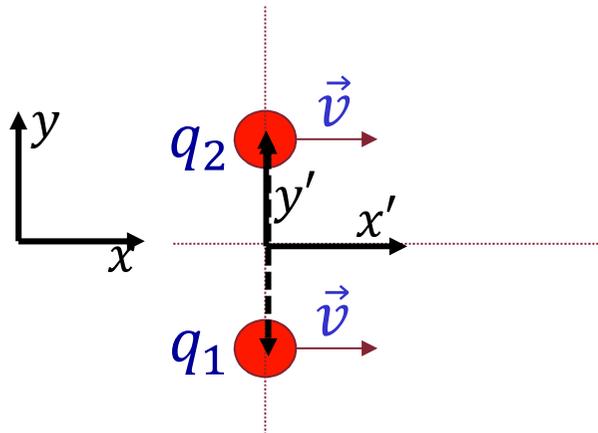
Linee di forza del campo elettrico



Campi elettromagnetici prodotti da una carica in moto



Forza tra due cariche in moto relativistico



Nel sistema di riferimento S' in cui la carica è ferma

$$F'_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r'^2}$$

Nel sistema di riferimento S in cui le cariche si stanno muovendo, usiamo le trasformazioni relativistiche

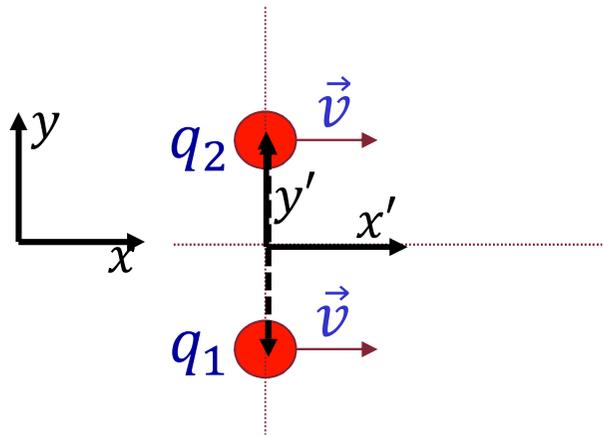


$$F_r = \frac{F'_r}{\gamma} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\gamma r^2}$$

Forza tra due cariche in moto relativistico

Perché, se il campo elettrico trasverso cresce con l'energia, la forza tra due cariche diminuisce?

Perché c'è anche la forza prodotta dal campo magnetico:



$$\begin{aligned} F_r &= q_2(E_r - vB_{\perp}) = q_2 \left(E_r - \frac{v^2 E_r}{c^2} \right) \\ &= q_2(E_r - \beta^2 E_r) = \frac{q_2}{\gamma^2} E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\gamma r^2} \end{aligned}$$