CENNI SULL'USO DEL METODO SIMBOLICO PER IL CALCOLO DELLA RISPOSTA IN REGIME PERMANENTE SINUSOIDALE DEI CIRCUITI RLC

Consideriamo un circuito composto da una rete di elementi lineari passivi (come resistori, condensatori, induttori) a cui è applicato un generatore di forza elettromotrice *v(t)* il quale fornisce una corrente *i(t)* incognita. È possibile vedere tale rete come se fosse un sistema (governato da equazioni integro – differenziali lineari e permanenti) la cui sollecitazione è *v(t)* e la cui risposta è *i(t)*, come mostrato in figura 1.

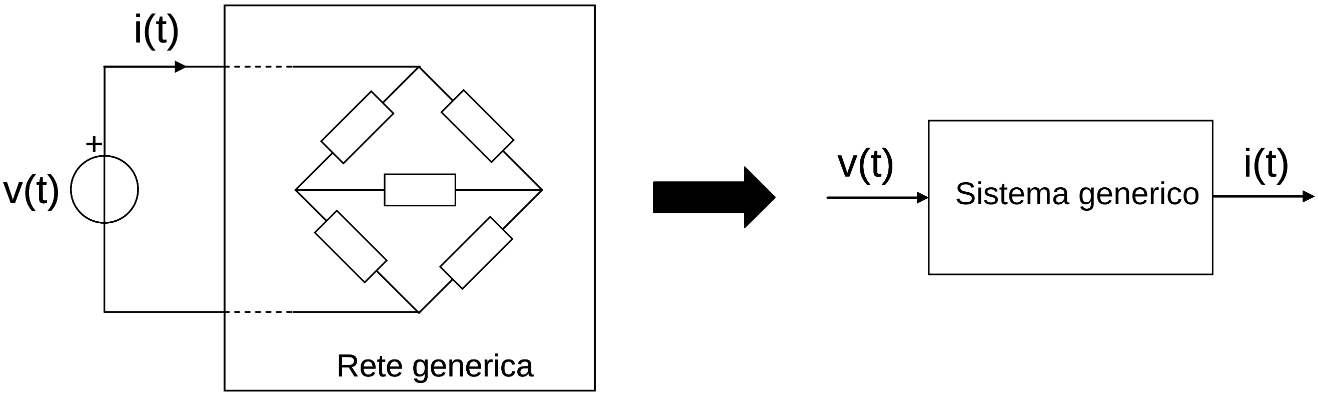


Figura 1

Consideriamo adesso alcune premesse:

1) Un sistema è lineare se alla sollecitazione $v(t) = a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t)$ risponde con $i(t) = a_1 i_1(t) + a_2 i_2(t)$, dove le $i_1(t)$ e $i_2(t)$ sono rispettivamente le risposte alle sollecitazioni $v_1(t)$ e $v_2(t)$ quando agiscono separatamente; vale quindi il principio di sovrapposizione degli effetti.
2) Una funzione reale *f(t)* si dice periodica di periodo *T>0* se per ogni *t* risulta *f(t+T)=f(t)*. Il minimo valore T_0 di *T* per cui vale la condizione precedente è detto periodo fondamentale della funzione *f(t)*.
3) Teorema di Fourier: data una funzione *f(t)* periodica di periodo *T*, sotto opportune ipotesi (per noi sempre verificate) è possibile esprimere *f(t)* come $f(t) = \sum_{0}^{+\infty} {}_n \, c_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t + \varphi_n \right)$.

4) Qualcosa di simile si ha anche se la funzione *f(t)* non è periodica, ma è $f(t) \neq 0$ e limitata in un intervallo finito di tempo $\Delta\tau$. In questo caso si ottiene uno sviluppo in serie (sommatoria integrale) di termini armonici (seno o coseno) infinitesimi che danno luogo alla trasformata di Fourier.

5) Potendosi quindi esprimere una generica sollecitazione *v(t)* come somma di sollecitazioni armoniche del tipo $v(t) = \sum_0^{+\infty}{}_n c_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t + \varphi_n\right)$ ed essendo il sistema lineare e permanente (in quanto governato da eq. integro – differenziali a coefficienti costanti nel tempo), anche la risposta sarà del tipo $i(t) = \sum_0^{+\infty}{}_n c_n i_n(t)$, dove $i_n(t)$ è la risposta alla singola cosinusoide $\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t + \varphi_n\right)$. Si può dimostrare che, in queste condizioni, la risposta ad una generica sollecitazione $v(t) = v_0 \cos(\omega t + \varphi_V)$ è ancora una risposta armonica $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi_I)$ con la stessa pulsazione $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ed opportuna ampiezza i_0 e fase iniziale φ_I, dove le relazioni che legano v_0 ad i_0 e φ_V a φ_I sono indipendenti dal tempo, eventualmente dipendenti da ω.

Premesso tutto questo si conclude che senza perdita di generalità possiamo limitarci a studiare la risposta del sistema ad una sollecitazione di tipo armonico, risposta che ci aspettiamo sia ancora armonica con la stessa pulsazione della sollecitazione. Per conoscere quindi completamente il mio sistema è sufficiente trovare le relazioni che legano v_0 ad i_0 e φ_V a φ_I ad una data pulsazione generica ω. Per fare questo risolveremo le equazioni integro – differenziali usando il Metodo Simbolico. In tale metodo nelle equazioni integro – differenziali che costituiscono il sistema, si sostituiscono alla sollecitazione reale

1) $v(t) = v_0 \cos(\omega t + \varphi_V)$

la funzione complessa

2) $\tilde{v}(t) = v_0 e^{j\varphi_V} e^{j\omega t} = \tilde{v}_0 e^{j\omega t}$

ed alla risposta reale

3) $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi_I)$

la risposta complessa

4) $\tilde{i}(t) = i_0 e^{j\varphi_I} e^{j\omega t} = \tilde{i}_0 e^{j\omega t}$;

i termini $\tilde{v}_0 = v_0 e^{j\varphi_V}$ e $\tilde{i}_0 = i_0 e^{j\varphi_I}$ sono detti ***ampiezze complesse***.

Si noti che è sempre possibile tornare alle funzioni reali prendendo la parte reale delle corrispettive funzioni complesse: $v(t) = \mathrm{Re}\{\tilde{v}(t)\}$ e $i(t) = \mathrm{Re}\{\tilde{i}(t)\}$.

Si definisce inoltre la grandezza ***impedenza complessa*** $\tilde{Z}$ come:

5) $\tilde{Z} = \dfrac{\tilde{v}(t)}{\tilde{i}(t)}$.

Dalla (5) si ha:

6) $\tilde{Z} = \dfrac{\tilde{v}(t)}{\tilde{i}(t)} = \dfrac{\tilde{v}_0 e^{j\omega t}}{\tilde{i}_0 e^{j\omega t}} = \dfrac{\tilde{v}_0}{\tilde{i}_0}$ che risulta indipendente dal tempo; $\tilde{Z}$ quindi rappresenta la funzione di trasferimento del sistema.

$\tilde{Z}$ è un numero complesso e può essere espresso come (modulo e fase):

7) $\tilde{Z} = Z e^{j\varphi_Z}$

dove $Z = |\tilde{Z}|$ è detto semplicemente ***impedenza*** ed è il modulo di $\tilde{Z}$, mentre $\varphi_Z = \arg\{\tilde{Z}\}$ è l'argomento di $\tilde{Z}$ detto anche ***fase*** di $\tilde{Z}$. Sia $\tilde{Z}$ che Z sono espresse in Ω.

$\tilde{Z}$ può anche essere espresso come (parte reale e immaginaria):

8) $\tilde{Z} = \mathrm{Re}\{\tilde{Z}\} + j\,\mathrm{Im}\{\tilde{Z}\} = R + jX$

dove la parte reale R di $\tilde{Z}$ è detta ***resistenza*** e la parte immaginaria X è detta ***reattanza***.

Ricordiamo che si ha:

9) $Z = |\tilde{Z}| = \sqrt{\mathrm{Re}^2\{\tilde{Z}\} + \mathrm{Im}^2\{\tilde{Z}\}}$

10) $\varphi_Z = \arg\{\tilde{Z}\} = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{\mathrm{Im}\{\tilde{Z}\}}{\mathrm{Re}\{\tilde{Z}\}}\right) & se \quad \mathrm{Re}\{\tilde{Z}\} \geq 0 \\ \arctan\left(\dfrac{\mathrm{Im}\{\tilde{Z}\}}{\mathrm{Re}\{\tilde{Z}\}}\right) + \pi & se \quad \mathrm{Re}\{\tilde{Z}\} < 0 \end{cases}$

(anche se è raro trovare casi in cui risulti $R = \mathrm{Re}\{\tilde{Z}\} < 0$).

Dalla (6) e dalla (7) risulta allora:

11) $$\tilde{Z} = \begin{cases} \dfrac{\tilde{v}_0}{\tilde{i}_0} = \dfrac{v_0 e^{j\varphi_V}}{i_0 e^{j\varphi_I}} = \dfrac{v_0}{i_0} e^{j(\varphi_V - \varphi_I)} \\ Ze^{j\varphi_Z} \end{cases},$$

dal confronto si ha che:

12) $$\begin{cases} Z = \dfrac{v_0}{i_0} \\ \varphi_Z = \varphi_V - \varphi_I \end{cases}.$$

Il problema differenziale è quindi risolto quando conosco l'impedenza complessa $\tilde{Z}$ del mio sistema, infatti dalla 12) risulta:

13) $$i_0 = \frac{v_0}{Z} = \frac{v_0}{|\tilde{Z}|}$$

14) $$\varphi_I = \varphi_V - \varphi_Z = \varphi_V - \arg\{\tilde{Z}\}$$

da cui, la soluzione del mio problema è:

15) $$i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi_I) = \frac{v_0}{|\tilde{Z}|} \cos(\omega t + \varphi_V - \arg\{\tilde{Z}\}).$$

APPLICAZIONI AD ALCUNI CIRCUITI SEMPLICI

I singoli elementi R,L,C

Resistore di resistenza R

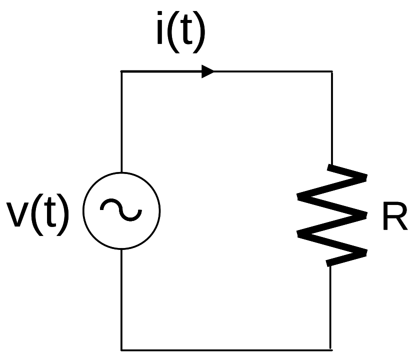


Figura 2

L'equazione differenziale che descrive il circuito è: $v(t) = Ri(t)$, da cui sostituendo le grandezze complesse si ha: $\tilde{v}(t) = R\tilde{i}(t)$, cioè:

$$v_0 e^{j\varphi_V} e^{j\omega t} = Ri_0 e^{j\varphi_I} e^{j\omega t} \rightarrow v_0 e^{j\varphi_V} = Ri_0 e^{j\varphi_I} \quad .$$

Quest'ultima è una equazione algebrica complessa indipendente dal tempo che corrisponde a due equazioni algebriche reali. Per esempio se considero le equazioni per i moduli e per le fasi ottengo:

$$\begin{cases} v_0 = Ri_0 \\ \varphi_V = \varphi_I \end{cases}$$, da cui ricordando la (12) si ottiene:

$$16) \quad \begin{cases} Z_R = \dfrac{v_0}{i_0} = R \\ \varphi_{ZR} = \varphi_V - \varphi_I = 0 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \tilde{Z}_R = Z_R e^{j\varphi_{ZR}} = R \cdot e^{j\cdot 0} = R \quad .$$

L'impedenza complessa è quindi puramente reale ed è uguale alla resistenza *R*.

Induttore di induttanza L

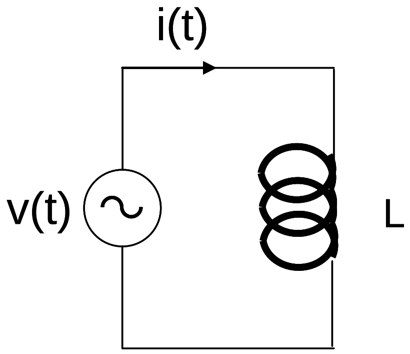


Figura 3

L'equazione differenziale che descrive il circuito è: $v(t) - L\dfrac{di(t)}{dt} = 0$, da cui sostituendo le grandezze complesse si ha: $\tilde{v}(t) - L\dfrac{d\tilde{i}\,(t)}{dt} = 0$, cioè:

$$v_0 e^{j\varphi_V} e^{j\omega t} = L\frac{d(i_0 e^{j\varphi_I} e^{j\omega t})}{dt} = j\omega L i_0 e^{j\varphi_I} e^{j\omega t} \qquad \rightarrow$$

$$v_0 e^{j\varphi_V} = j\omega L i_0 e^{j\varphi_I} = \left(e^{j\pi/2}\right)\omega L i_0 e^{j\varphi_I} \; .$$

Quest'ultima è una equazione algebrica complessa indipendente dal tempo che corrisponde a due equazioni algebriche reali. Per esempio se considero le equazioni per i moduli e per le fasi ottengo:

$$\begin{cases} v_0 = \omega L i_0 \\ \varphi_V = \varphi_I + \pi/2 \end{cases} ,$$ da cui ricordando la (12) si ottiene:

17) $$\begin{cases} Z_L = \dfrac{v_0}{i_0} = \omega L \\ \varphi_{ZL} = \varphi_V - \varphi_I = +\pi/2 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \tilde{Z}_L = Z_L e^{j\varphi_{ZL}} = \omega L \cdot e^{j\cdot\pi/2} = j\omega L \qquad .$$

L'impedenza complessa è quindi puramente immaginaria ed è descritta dalla sua reattanza $X_L = \omega L$.

Condensatore di capacità C

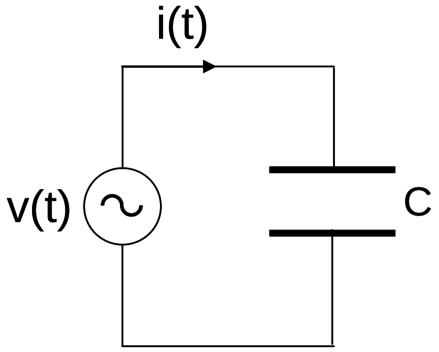


Figura 4

L'equazione integro - differenziale che descrive il circuito è: $v(t)+\frac{q(t)}{C}=0$ con $i(t)=-\frac{\partial q(t)}{\partial t}$, dove abbiamo preso i segni delle cadute di tensione seguendo, convenzionalmente, il verso di percorrenza delle maglia. Da queste equazioni si ha: $v(t)=\frac{-q(t)}{C}=\frac{1}{C}\int i(t)dt$. Sostituendo le grandezze complesse si ottiene:

$\tilde{v}(t)=\frac{1}{C}\int \tilde{i}(t)dt$, cioè:

$$v_0 e^{j\varphi_V} e^{j\omega t} = \frac{1}{C}\int (i_0 e^{j\varphi_I} e^{j\omega t})dt = \frac{1}{j\omega C} i_0 e^{j\varphi_I} e^{j\omega t} \quad \rightarrow$$

$$v_0 e^{j\varphi_V} = \frac{1}{j\omega C} i_0 e^{j\varphi_I} = \frac{-j}{\omega C} i_0 e^{j\varphi_I} = \frac{e^{-j\pi/2}}{\omega C} i_0 e^{j\varphi_I} \quad .$$

È una equazione algebrica complessa indipendente dal tempo che corrisponde a due equazioni algebriche reali. Per esempio se considero le equazioni per i moduli e per le fasi ottengo:

$$\begin{cases} v_0 = \frac{i_0}{\omega C} \\ \varphi_V = \varphi_I - \pi/2 \end{cases} ,$$

da cui ricordando la (12) si ottiene:

18) $$\begin{cases} Z_C = \frac{v_0}{i_0} = \frac{1}{\omega C} \\ \varphi_{ZC} = \varphi_V - \varphi_I = -\pi/2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \tilde{Z}_C = Z_C e^{j\varphi_{ZC}} = \frac{1}{\omega C}\cdot e^{-j\pi/2} = \frac{-j}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C} \quad .$$

L’impedenza complessa è quindi puramente immaginaria ed è descritta dalla sua reattanza $X_C = \frac{-1}{\omega C}$.

Collegamento in serie ed in parallelo di due (o più) impedenze

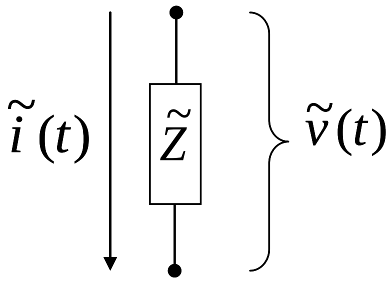


Figura 5

Dalla eq. (5) si vede che per ogni elemento circuitale caratterizzato dalla propria impedenza complessa $\tilde{Z}$ vale la legge di Ohm per le impedenze complesse: $\tilde{v}(t) = \tilde{Z} \cdot \tilde{i}(t)$ (vedi figura 5). Per calcolare l’impedenza complessa equivalente di due elementi circuitali di impedenza complessa $\tilde{Z}_1$ e $\tilde{Z}_2$ connessi in serie facciamo riferimento alla figura 6.

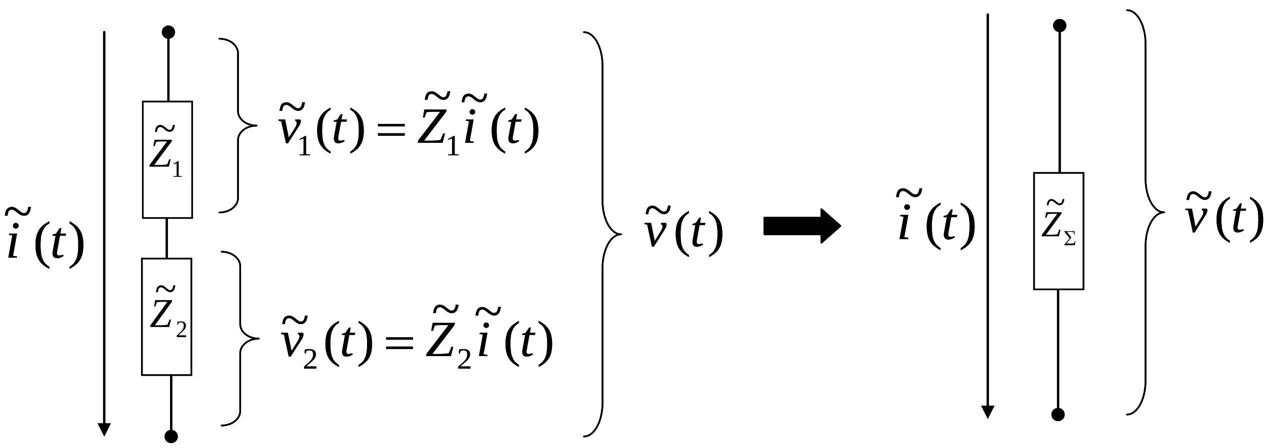


Figura 6

Si vede che $\tilde{v}(t)=\tilde{v}_1(t)+\tilde{v}_2(t)=\left(\tilde{Z}_1+\tilde{Z}_2\right)\cdot\tilde{i}(t)$ (dal momento che è la stessa corrente $\tilde{i}(t)$ a passare attraverso i due elementi caratterizzati da $\tilde{Z}_1$ e $\tilde{Z}_2$); da cui l'impedenza complessa equivalente serie risulta $\tilde{Z}_\Sigma=\frac{\tilde{v}(t)}{\tilde{i}(t)}=\tilde{Z}_1+\tilde{Z}_2$. Applicando il ragionamento più volte si ottiene la formula per l'impedenza complessa equivalente della serie di più impedenze complesse $\tilde{Z}_n$:

19) $\tilde{Z}_\Sigma=\sum_n \tilde{Z}_n$,

formula del tutto simile a quella per la serie di più resistenze.
Per il calcolo di (19) può essere utile ricordare che:

$$\tilde{Z}_\Sigma=\sum_n \tilde{Z}_n=\sum_n\left(\mathrm{Re}\{\tilde{Z}_n\}+j\,\mathrm{Im}\{\tilde{Z}_n\}\right)=\sum_n \mathrm{Re}\{\tilde{Z}_n\}+j\sum_n \mathrm{Im}\{\tilde{Z}_n\}=A+jB.$$

Per ottenere l'impedenze complessa equivalente di più impedenze complesse $\tilde{Z}_n$ in parallelo, effettuando ragionamenti simili si ottiene la formula:

20) $\frac{1}{\tilde{Z}_{//}}=\sum_n \frac{1}{\tilde{Z}_n}$,

del tutto simile a quella per il calcolo del parallelo di più resistenze. Per il calcolo di (20) può essere utile ricordare che:

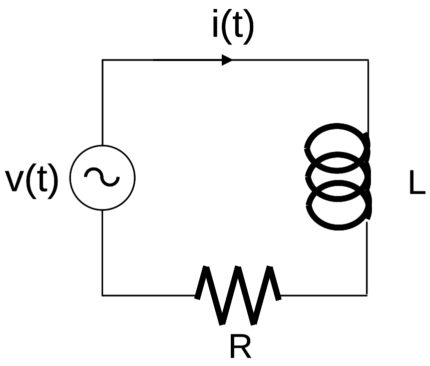
$$\frac{1}{\tilde{Z}_{//}}=\sum_n\frac{1}{\tilde{Z}_n}=\sum_n\frac{1}{\left(\mathrm{Re}\{\tilde{Z}_n\}+j\,\mathrm{Im}\{\tilde{Z}_n\}\right)}=\sum_n\frac{1}{\left(\mathrm{Re}\{\tilde{Z}_n\}+j\,\mathrm{Im}\{\tilde{Z}_n\}\right)}\cdot\frac{\left(\mathrm{Re}\{\tilde{Z}_n\}-j\,\mathrm{Im}\{\tilde{Z}_n\}\right)}{\left(\mathrm{Re}\{\tilde{Z}_n\}-j\,\mathrm{Im}\{\tilde{Z}_n\}\right)}=$$
$$=\sum_n\frac{\mathrm{Re}\{\tilde{Z}_n\}}{\mathrm{Re}^2\{\tilde{Z}_n\}+\mathrm{Im}^2\{\tilde{Z}_n\}}+j\sum_n\frac{-\mathrm{Im}\{\tilde{Z}_n\}}{\mathrm{Re}^2\{\tilde{Z}_n\}+\mathrm{Im}^2\{\tilde{Z}_n\}}=A+jB$$

da cui:

$$\tilde{Z}_{//}=\frac{1}{A+jB}=\frac{1}{A+jB}\cdot\frac{A-jB}{A-jB}=\frac{A}{A^2+B^2}+j\frac{-B}{A^2+B^2}=C+jD \qquad ,$$

con ovvio significato dei simboli.

Circuiti RL serie

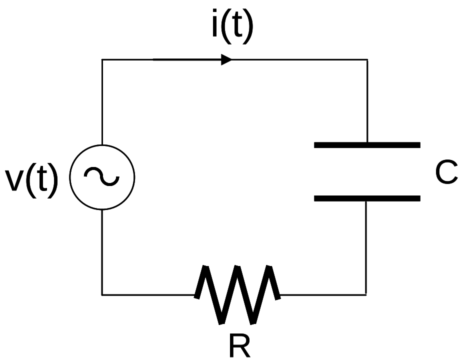


Nei circuiti RL serie l'impedenza complessa equivalente è la serie di quella del resistore e di quella dell'induttore:

21) $\tilde{Z}_{RL} = \tilde{Z}_R + \tilde{Z}_L = R + j\omega L$ da cui:

22) $$\begin{cases} Z_{RL} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \\ \varphi_{ZRL} = \arctan\left(\dfrac{\omega L}{R}\right) \end{cases} .$$

Circuiti RC serie

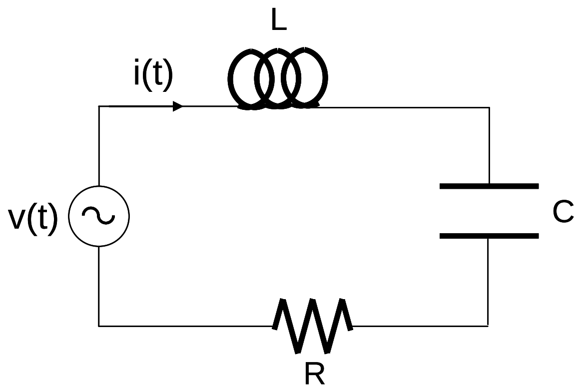


Nei circuiti RC serie l'impedenza complessa equivalente è la serie di quella del resistore e di quella del condensatore:

23) $\tilde{Z}_{RC} = \tilde{Z}_R + \tilde{Z}_C = R + j\left(\dfrac{-1}{\omega C}\right)$ da cui:

24) $$\begin{cases} Z_{RC} = \sqrt{R^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}} \\ \varphi_{ZRC} = \arctan\left(\dfrac{-1}{\omega RC}\right) \end{cases} .$$

Circuiti RLC serie



Nei circuiti RLC serie l'impedenza complessa equivalente è la serie di quella del resistore e di quella del condensatore e dell'induttore:

25) $\tilde{Z}_{RCL} = \tilde{Z}_R + \tilde{Z}_L + \tilde{Z}_C = R + j\omega L + j\left(\frac{-1}{\omega C}\right) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ da cui:

26) $$\begin{cases} Z_{RLC} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \\ \varphi_{ZRLC} = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) \end{cases}$$.

Per il calcolo della corrente che scorre in un circuito RLC serie quando è sottoposto alla forza elettromotrice $v(t) = v_0 \cos(\omega t + \varphi_V)$ risulta quindi:

27) $$\begin{cases} i_0 = \frac{v_0}{Z_{RLC}} = \frac{v_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \\ \varphi_I = \varphi_V - \varphi_{ZRLC} = \varphi_V - \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) \end{cases}$$

da cui è possibile ricavare la corrente come (15):

28) $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi_I)$.