Capitolo I

Equazioni Differenziali Ordinarie

Metodi Analitici

I.6. Ricerca di soluzioni per serie di potenze

In questo paragrafo, per motivi in definitiva solo “storici”, si userà la lettera x per indicare la variabile *indipendente* mentre la lettera y per la funzione *dipendente, entrambe scalari reali.*

MEMENTO Una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ (di punto iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$) si dice convergente nel punto x se

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n(x-x_0)^n \quad =: \quad s(x) \quad < \quad \infty \, .$$

Raggio di convergenza R := l'estremo superiore dei valori $|x-x_0| \in \mathbb{R}$ per i quali il limite detto esiste finito.

□

In molti casi il criterio del rapporto permette di trovare R. Posto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x-x_0| \;=:\; \lambda(x) \quad \text{si ha che} \quad \begin{cases} \lambda < 1 & \text{serie convergente} \\ \lambda > 1 & \text{serie non convergente} \end{cases}$$

e quindi

$$R \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \quad .$$

Weiestrass M-test o convergenza totale := Sia $\{u_n\}_{n=0,1,\dots}$ una successione di funzioni $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che:
(1) le funzioni u_n siano definite su un qualsiasi insieme $A \subseteq \mathbb{R}$;
(2) su A, e per ciascun n, avvenga che $|u_n(x)| < M_n$, per certi $M_n \in \mathbb{R}^+$;
(3) la serie $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ sia convergente;

allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ è assolutamente ed uniformemente convergente su A.
Dimostrazione Basta ricordare la definizione di uniforme convergenza.

■

Per semplicità, si assuma $x_0 = 0$.

Lemma

Se una data serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ è convergente per un certo $\widetilde{x} \in \mathbb{R}$, e cioè se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \widetilde{x}^n := s(\widetilde{x}) < \infty$, allora l'M-test assicura che: la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge assolutamente ed uniformemente per ogni $x \in [-\xi, \xi]$ con $0 \le \xi < |\widetilde{x}|$.

Lo stesso risultato sussiste per la serie delle derivate $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ la quale, inoltre, ha come somma la derivata della somma della serie iniziale.

Dimostrazione Dato che la successione $\{\widetilde{s}_N\}_{N\in\mathbb{N}} := \left\{\sum_{n=0}^{N} a_n \widetilde{x}^n\right\}_{N\in\mathbb{N}}$ delle somme ridotte è di Cauchy essa è limitata, e si ha $a_n \widetilde{x}^n \xrightarrow[\infty]{n} 0$. In particolare esiste $\sigma \in \mathbb{R}$ tale che $|a_n||\widetilde{x}^n| < \sigma$ per ogni n. Sia $\xi < |\widetilde{x}|$; allora per $|x| \le \xi$ si ha: $|a_n||x^n| \le |a_n|\xi^n = |a_n \widetilde{x}^n| |\xi^n/|\widetilde{x}|^n < \sigma\, |\xi/\widetilde{x}|^n$.

Ma la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} |\xi/\widetilde{x}|^n$ converge, e siccome maggiora la serie data questa converge assolutamente ed uniformemente su $[-\xi, \xi]$.

Analogo risultato si ottiene per la serie delle derivate, infatti sussiste la stima

$$|n a_n x^{n-1}| \le |n||a_n|\xi^{n-1} = n|a_n||\widetilde{x}|^n\, |\xi/\widetilde{x}|^n\, (1/\xi) < |\sigma/\xi|\, n\, |\xi/\widetilde{x}|^n \ ;$$

la serie di cui quest'ultima è il termine n-mo converge per il criterio del rapporto, per cui (eventualmente rinominando i coefficienti) si può nuovamente agire con l'M-test. Ne segue anche che la somma delle derivate è continua ed è proprio la derivata della somma della serie, (metodo "3ε"). Infine, lo stesso ragionamento si può ripetere per la k-esima derivata, per la quale si ha

$$\begin{aligned} n(n-1)\cdots(n-k+1)|a_n||\widetilde{x}|^n\, |\xi/\widetilde{x}|^n\, (1/\xi^k) &< \\ &< \left|\sigma/\xi^k\right| n(n-1)\cdots(n-k+1)\, |\xi/\widetilde{x}|^n \end{aligned}$$

ed ancora il criterio del rapporto dà $|\xi/\widetilde{x}|\, n/\,(n-k) \longrightarrow |\xi/\widetilde{x}| < 1$.

■

Funzione analitica in x_0 : $f(x) \in \mathcal{C}^\omega(x_0)$:= una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che ammette derivate $f^{[n]}(x_0)$ di ogni ordine, e per la quale esista un $c > 0$ tale che: per ogni $x \in B_c(x_0)$ si ha

$$f(x) - \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} f^{[m]}(x_0)(x - x_0)^m =: r_n(x) \xrightarrow[\infty]{n} 0.$$

La sola condizione $f \in \mathcal{C}^\infty(x_0)$, e cioè l'esistenza in x_0 delle derivate $f^{[n]}(x_0)$ di ogni ordine n, comporta "solo" (Teorema di Taylor, [Spivak 19.4]) l'esistenza di un conveniente punto $\bar{x} \in B_{|x-x_0|}(x_0)$, dipendente da x, x_0, n, f, tale che (per un qualsiasi n) $r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{[n+1]}(\bar{x})(x-x_0)^{n+1}$].

Le proprietà asintotiche e di derivabilità viste sopra implicano che: *la somma $s(x)$ di una serie di potenze $\sum_{n=0}^\infty a_n(x-x_0)^n$ è una funzione analitica all'interno dell'intervallo di convergenza $B_R(x_0)$, e verifica la relazione $a_n \equiv \frac{1}{n!} s^{[n]}(x_0)$.* Quest'ultima uguaglianza inoltre implica l'unicità dello sviluppo *della somma.*

Più debolmente: se una funzione $f = f(x)$ è infinitamente differenziabile per $|x - x_0|$ minore di un certo $c \in \mathbb{R}^+$ *è possibile* che, in $B_c(x_0)$, essa sia uguale alla somma della sua serie di Taylor

$$f(x) = s(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \qquad \text{con} \qquad a_n = \frac{f^{[n]}(x_0)}{n!} \ ;$$

tuttavia ciò non è necessario; *non è detto infatti che la somma $s(x)$ della serie sia l'unica funzione che ha nel punto tutte le derivate ordinatamente uguali ai coefficienti della serie* (vedi: [Spivak p.398]). Ad esempio la funzione

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} \text{per} & x \neq 0 \\ \quad 0 \quad \text{per} & x = 0 \end{cases}$$

non è analitica in zero: ha infatti tutte le derivate nulle nell'origine pur non essendo la funzione nulla.

Le funzioni analitiche sono invece per definizione quelle identicamente uguali alla somma della loro serie di Taylor nel suo intervallo di convergenza.

Stante l'uniforme convergenza, sulle serie di potenze convergenti si può agire come sui polinomi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n \iff a_n = b_n \qquad \forall n;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)(x-x_0)^n \ ;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = s_1(x)s_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \ ,$$

$$\text{ove} \qquad c_n := \sum_{k+j=n} a_k b_j \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 \ .$$

In più si riconosce che lo spazio delle funzioni analitiche è chiuso rispetto alla somma, prodotto, composizione funzionale, limite uniforme, inversa continua (vedi: [Simmons §25; Flanigan V.2.3])

In virtù di tali proprietà, le serie di potenze risultano idonee ad essere usate come funzioni "campione" per problemi differenziali lineari in quei casi nei quali si sappia per altra via, o si assuma, che la soluzione del problema *sia una funzione analitica in un certo punto x_0.* È chiaro che in tal modo il risultato è da intendersi locale all'interno del cerchio di convergenza centrato nel punto di analiticità.

Il procedimento consiste nell'assumere, per l'incognita soluzione, una forma del tipo $s(x)$. Si assume cioè che sia $y(x) =: \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, e si ricercano le condizioni *necessarie* sui coefficienti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ affinché tale y sia soluzione del problema originario: equazione e dati iniziali. Stante l'unicità della soluzione, tali condizioni risultano anche *sufficienti* all'interno del cerchio di convergenza.

<u>Esempio 6.1</u> $\quad y' = y$

Il metodo fornisce, con $x_0 = 0$, la seguente condizione necessaria

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

dalla quale si ricavano le $\quad (n+1)a_{n+1} = a_n$. Si calcolano quindi, ricorsivamente,

$$a_1 = a_0, \quad 2a_2 = a_1 = a_0 \ , \qquad 3a_3 = a_2 = \frac{1}{2}a_0, \ \ldots, \qquad a_n = \frac{1}{n!}a_0$$

e si trova

$$y(x) \ = \ a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n \ =: \ a_0 \ e^x \ .$$

In questo caso è palese che il coefficiente a_0 rappresenta il dato $y(0)$.

□

Il metodo è utile particolarmente quando non si hanno a disposizione funzioni elementari che siano somma delle serie così trovate.

Si osservi inoltre che il procedimento è lecito anche a partire da un'assegnata funzione, purché analitica.

<u>Esempio 6.2</u> $\quad y(x) = (1+x)^\alpha \ , \qquad \alpha \in \mathbb{R}$.

La funzione data è soluzione, per $x \in B_c(0)$ e $c < 1$, della

$$y' = \alpha(1+x)^{\alpha-1} = \alpha(1+x)^{-1}y \qquad \text{e cioè della} \qquad \begin{cases} (1+x)y' = \alpha y \\ \quad y(0) = 1 \end{cases} .$$

Con $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ si ha, troncando al termine di grado $(n-1)$,

$$\begin{aligned} y' &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} \\ xy' &= \qquad\quad a_1x + 2a_2x^2 + \ldots + (n-1)a_{n-1}x^{n-1} \\ (1+x)y' &= a_1 + (2a_2+a_1)x + (3a_3+2a_2)x^2 + \ldots + (na_n + (n-1)a_{n-1})x^{n-1} \\ \alpha y &= \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 + \ldots + \alpha a_{n-1}x^{n-1} \end{aligned}$$

e quindi $\quad a_1 = \alpha a_0, \quad 2a_2 + a_1 = \alpha a_1, \quad \ldots, \quad na_n + (n-1)a_{n-1} = \alpha a_{n-1}$.
La condizione iniziale fissa $y(0) = a_0 = 1$ ed allora dalla

$$a_n = \frac{1}{n}(\alpha - (n-1))\, a_{n-1}$$

si ricava

$$a_1 = \alpha, \qquad a_2 = \frac{1}{2}(\alpha - 1)a_1 = \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 1)$$

che fa sperare in un termine ricorrente del tipo

$$a_n = \frac{1}{n!}\,\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - (n-1))\ .$$

Si controlla tale tentativo sulla terza e sull'ultima delle relazioni trovate e si conclude che la soluzione del problema è necessariamente espressa dalla serie

$$1 + \sum_{n=1} \frac{1}{n!}\,\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - (n-1))\,x^n$$

nella quale, ovviamente, si riconosce lo sviluppo di Taylor in $x = 0$ della funzione $(1+x)^\alpha$.

Siccome poi $\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| = \left|\frac{\alpha-n+1}{n}\right| \longrightarrow 1$, tale funzione è la somma di una serie di potenze convergente in $|x| < 1$ e quindi $y \in \mathcal{C}^\omega(B_1(0))$ e tutti i passaggi effettuati sono leciti. Il teorema di unicità infine garantisce che la funzione iniziale $y(x)$ e la somma della serie trovata sono necessariamente coincidenti.

□

<u>Nota 1</u> Talvolta viene introdotto il simbolo

$$(\beta)_k := (\beta)(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+k-1);$$

con esso, i coefficienti trovati sopra si possono anche scrivere come segue

$$\begin{aligned} a_n = a_n(\alpha) &= \frac{1}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1) \\ &= \frac{(-1)^n}{n!}(-\alpha)(-\alpha+1)\cdots(-\alpha+n-1) \\ &= \frac{1}{n!}(-1)^n(-\alpha)_n\ . \end{aligned}$$

In qualsiasi forma vengano espressi, i coefficienti a_n hanno le seguenti proprietà. Nel caso particolare in cui il numero $\alpha =: m$ è un numero intero positivo ciascuno dei coefficienti $a_n(m)$ è nullo se $n > m$, infatti $(-m)_{m+1} \equiv 0$, e quindi la serie dell'esempio precedente termina in una somma finita. Invece, per $n \le m$ si ha

$$a_n(m) = \frac{1}{n!}m(m-1)\cdots(m-n+1)\frac{(m-n)!}{(m-n)!} = \frac{m!}{n!(n-m)!} = \binom{m}{n}\ .$$

Nel caso generale, e facendo riferimento a quanto trovato nel caso $m \in \mathbb{N}$, si nota che la prima delle due espressioni ottenute per i coefficienti a_n può essere usata per *definire il simbolo* $\binom{\alpha}{n}$ *anche per α non necessariamente interi positivi*: si pone

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{1}{n!}(-1)^n(-\alpha)_n = \frac{1}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\ ; \qquad \binom{\alpha}{0} := 1\ ;$$

in tal modo l'esempio 2 dà $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n$ "come se" si trattasse di un qualsiasi sviluppo di binomio.

<u>Esempio 6.3</u> La funzione $\theta(x) := \arcsin x$, definita per $x < 1$, è soluzione della

$$\frac{d\theta}{dx} = \left(\frac{d\sin\theta}{d\theta}\Big|_{\theta(x)}\right)^{-1} = \frac{1}{\cos\theta(x)} = (1-x^2)^{-1/2} \ . \qquad (AS)$$

Ma, per quanto visto, il secondo membro è esprimibile come segue

$$(1-x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(1/2)_n x^{2n} \ .$$

Applicando, d'altra parte, all'equazione (AS) il metodo di ricerca per serie di potenze si ottiene, per la funzione $\arcsin x$, uno sviluppo del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i cui coefficienti necessariamente verificano la

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n &\equiv \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)a_{2n+1}x^{2n} + (2n+2)a_{2n+2}x^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(1/2)_n x^{2n} \ .\end{aligned}$$

Da questa si ricavano le due relazioni $a_{2k} = 0$, ed $a_{2k+1} = \frac{1}{k!(2k+1)}(1/2)_k$, e quindi una delle forme note per il calcolo di π :

$$\frac{1}{6}\,\pi = \arcsin\frac{1}{2} = 1\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots \ .$$

□

Per equazioni differenziali *lineari omogenee* il metodo si applica senza panico fintanto che i coefficienti sono funzioni $\mathcal{C}^\omega(B_R(x_0))$ infatti (vedi: [Bender - Orszag cap.III, opp. Simmons §27]) *anche ogni loro soluzione lo sarà.*

Qui verrà trattato il caso delle equazioni del secondo ordine con primo coefficiente uguale ad uno, e cioè

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \ , \qquad \text{con} \quad x_0, y_0, y_0' \in \mathbb{R} \ ; \qquad (O2)$$

e si mostrerà come se $p, q \in \mathcal{C}^\omega(B_R(x_0))$ allora anche la y è in $\mathcal{C}^\omega(B_R(x_0))$.

Un siffatto punto x_0 viene detto <u>Punto ordinario</u>, o non singolare.

Se invece x_0 è tale che p, q *sono non analitici, ma lo sono le due funzioni*

$$\widetilde{p}(x) := (x-x_0)p(x) \qquad ed \qquad \widetilde{q}(x) := (x-x_0)^2 q(x)$$

allora il punto x_0 è detto <u>Punto singolare regolare</u>.

In tal caso la funzione soluzione *può*, non deve, *essere non analitica*, ma allora la sua non analiticità o è una singolarità algebrica oppure logaritmica, e cioè dei tipi $(x-x_0)^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$, oppure $\ln(x-x_0)$.

Negli altri casi il punto è detto <u>Singolare Irregolare</u>, ed almeno una delle funzioni soluzione presenta una singolarità essenziale, in generale tutte.

Le definizioni dette si estendono ai casi di ordine superiore: un punto x_0 è singolare regolare per l'equazione $y^{[n]} + q_1(x)y^{[n-1]} + \ldots + q_n(x)y = 0$ se esso è tale da rendere analitici ciascuno dei prodotti

$$\begin{aligned}\widetilde{q}_n(x) &:= (x-x_0)^n q_n(x),\\ \widetilde{q}_{n-1}(x) &:= (x-x_0)^{n-1} q_{n-1}(x),\\ \ldots &\qquad \ldots\\ \widetilde{q}_1(x) &:= (x-x_0)q_1(x)\ .\end{aligned}$$

Sia per il momento x_0 un punto ordinario per la $(O2)$ con R il raggio di analiticità dei coefficienti e condizioni iniziali $y(x_0) = y_0$ ed $y'(x_0) = y'_0$ arbitrarie. L'idea è di fare uno sviluppo locale intorno al punto $x_0,$ che risulterà anche globale qualora $R = \infty$. Il procedimento è costruttivo. [Qui di seguito si supporrà $x_0 = 0$, ma il caso generale si può ottenere facilmente sostituendo x con $(x - x_0)$].

Siano: $p(x) =: \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ e $q(x) =: \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$; e si ponga

$$y(x) =: \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad \text{e quindi} \qquad \begin{cases} y'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n\ , \\ y''(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n\ . \end{cases}$$

Si ricavano le

$$\begin{aligned} q(x)y(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k} \quad ;\\ p(x)y'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^{n} (k+1)a_{k+1} p_{n-k}\ . \end{aligned}$$

Ne segue la successione di condizioni necessarie

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)a_{k+1}p_{n-k} + a_k q_{n-k}\right] = 0\ . \qquad (ER)$$

Tali relazioni permettono senz'altro di determinare in modo univoco il termine a_{n+2} *quando siano noti i precedenti*:

$$\begin{aligned} (n=0) &\longrightarrow & 2a_2 &= -(a_1p_0 + a_0q_0)\\ (n=1) &\longrightarrow & 3\cdot 2a_3 &= -(a_1p_1 + a_0q_1) - (2a_2p_0 + a_1q_0)\\ \ldots & & \ldots & \quad \ldots \qquad \ldots \end{aligned}$$

Di conseguenza rimangono da assegnare solo i due coefficienti $a_0,\ a_1$, ed è palese che ciò si possa fare in modo del tutto arbitrario. In funzione alle condizioni iniziali si esprimono allora $a_0 = y_0 = y(0)$ ed $a_1 = y_1 = y'(0)$ e quindi quella trovata rappresenta l'unica "soluzione" che passa per esse.

Occorre però dimostrare che essa esiste, e cioè che esista un qualche $R > 0$ per il quale la serie converge almeno in $B_R(0)$. Se questo è il caso, tutte le operazioni effettuate risultano lecite, e la soluzione del problema *è trovata, stante l'unicità, ed è analitica in* $B_R(0)$; (in tal modo, le (ER) risultano condizioni anche sufficienti).

La dimostrazione della convergenza in $B_R(0)$ di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ quando le a_n verificano le (ER) e purché i coefficienti p, q siano analitici in $B_R(0)$, è di routine: (vedi: [Simmons p. 183]).

NOTA 2 Se l'equazione è a coefficienti costanti, e quindi $p_n = q_n = 0$ per ogni $n > 0$ la (ER) si riduce a

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + (n+1)a_{n+1}p_0 + a_n q_0 = 0 \ .$$

ESEMPIO 6.4 Nel caso particolare $y'' + y = 0$ si hanno $p_0 = 0$, $q_0 = 1$. Ne segue la $(n+1)(n+2)a_{n+2} + a_n = 0$ e quindi

$$a_{2n} = \frac{1}{(2n)!}(-1)^n a_0 \qquad \text{ed} \qquad a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!}(-1)^n a_1 \ .$$

Si ottiene in tal modo un'alternativa *definizione* delle funzioni trigonometriche, chiaramente con raggio di convergenza $R = \infty$, data da

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(-1)^n x^{2n} \right) + a_1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(-1)^n x^{2n+1} \right) \\ &= a_0 \cos x + a_1 \sin x \ . \end{aligned}$$

□

Naturalmente il difficile è determinare non certo la forma (ER) ma la formula ricorrente che ne consegue: in questo esempio è stata a due termini, ma potrebbe essere peggiore, e ciò anche in base alla forma che si dà all'equazione di partenza.

ESEMPIO 6.5 L'equazione di Schrödinger stazionaria unidimensionale

$$\frac{\hbar^2}{2m}\,\psi'' + (\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(\xi))\,\psi = 0 \ , \qquad \xi \in \mathbb{R} \ . \tag{SC}$$

Quando siano

$$\mathcal{V}(\xi) = \frac{k}{2}\,\xi^2, \qquad \frac{k}{m} =: \omega^2, \qquad \hbar\omega =: h\nu, \qquad \frac{m\omega}{\hbar}\,\xi^2 =: x^2 \in \mathbb{R} \ ,$$

la (SC) diviene:

$$\begin{cases} \psi'' + (\lambda - x^2)\psi = 0 & \lambda = \dfrac{2\mathcal{E}_0}{h\nu} \in \mathbb{R}^+ \ ; \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1 \quad \text{con} \quad \psi \xrightarrow[\infty]{|x|} 0; & \nu^2 = \left(\dfrac{\omega}{2\pi}\right)^2 = \dfrac{k/m}{4\pi^2} \ . \end{cases} \tag{$HE.1$}$$

A prescindere dalle condizioni al contorno, l'equazione così trovata può ulteriormente essere trasformata. Si ponga: $y(x) := e^{x^2/2}\psi(x)$ e quindi $\psi' = e^{-x^2/2}y' - xe^{-x^2/2}y$ e $\psi'' = e^{-x^2/2}\left[y'' - 2xy' - y + x^2y\right]$. Con queste relazioni, dalla $(HE.1)$ si ottiene l'equazione di Hermite classica:

$$y'' - 2xy' + (\lambda - 1)y = 0 \quad ; \qquad (HE.2)$$

la quale a sua volta, moltiplicata per e^{-x^2}, assume una forma particolarmente utile per la sua discussione, [Simmons]:

$$\left(e^{-x^2}y'\right)' + (\lambda - 1)e^{-x^2}y = 0 \quad . \qquad (HE.3)$$

Il metodo consiste nel cercare soluzioni della forma $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. La $(HE.1)$ dà facilmente $(n+1)(n+2)a_{n+2} + \lambda a_n - a_{n-2} = 0$, la quale però è una ostica relazione a tre termini. È più conveniente, invece, servirsi della $(HE.2)$. Ponendo $2\varrho := (\lambda - 1)$ si ottiene $(n+1)(n+2)a_{n+2} - 2na_n + 2\varrho a_n = 0$, ovvero

$$a_{n+2} = \frac{-2(\varrho - n)}{(n+1)(n+2)}\, a_n \qquad (CH)$$

dalla quale si ricavano

$$a_2 = -\varrho a_0, \qquad a_4 = \frac{-2(\varrho - 2)}{3 \cdot 4}\, a_2 = \frac{(-2)^2 \varrho(\varrho - 2)}{(2 \cdot 2)!}\, a_0 \ ,$$

e così via. In definitiva si arriva alle

$$a_{2k} = \frac{(-2)^k}{(2k)!}\varrho(\varrho - 2)\cdots(\varrho - 2k + 2)a_0 \ , \qquad (SY1)$$

$$a_{2k+1} = \frac{(-2)^k}{(2k+1)!}(\varrho - 1)(\varrho - 3)\cdots(\varrho - 2k + 1)a_1 \ , \qquad (SY2)$$

e si vede subito che è $R = \infty$. Inoltre, con il porre nulli prima tutti i termini dispari e poi quelli pari, e cioè scegliendo, come fatto nel precedente esempio, $(a_{1,0}, a_{1,1}) := (1, 0)$ e, rispettivamente, $(a_{2,0}, a_{2,1}) := (0, 1)$, si trova che è

$$\psi(x) = e^{-x^2/2}y(x) = e^{-x^2/2}y_1(x) + e^{-x^2/2}y_2(x) \ , \qquad (SH)$$

ove le funzioni y_1 ed y_2 sono espresse mediante le serie di potenze aventi i coefficienti $(SY1)$ ed $(SY2)$ rispettivamente e gli altri tutti nulli. Tali funzioni sono, inoltre, convergenti per ogni x poiché tali sono i coefficienti di $(HE.2)$, e certo fra loro linearmente indipendenti poiché di diversa parità.

Nel problema fisico, tuttavia, si cercano soluzioni $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ *che siano soggette all'ulteriore vincolo*: $|\psi| \xrightarrow[\infty]{|x|} 0$. Per studiare l'avverarsi di tale condizione, si ricordi innanzi tutto che $e^{x^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n}x^{2n}$ con $b_{2n} := (2^n n!)^{-1}$. Pertanto, il primo addendo della (SH) ammette la seguente espressione

$$e^{-x^2/2}y_1(x) = \frac{a_0 + a_2x^2 + \cdots + a_{2n}x^{2n} + \cdots}{b_0 + b_2x^2 + \cdots + b_{2n}x^{2n} + \cdots} \ .$$

Si può esaminare cosa accade per $|x| \to \infty$ osservando il rapporto $|a_{2n}|/|b_{2n}|$. Se per $n \gg 1$ risultasse $|a_{2n}|/|b_{2n}| > 1$ allora, dato che tutti i coefficienti hanno lo stesso segno (positivo) per n sufficientemente grandi, senz'altro *non potrebbe essere* $|\psi| \xrightarrow[\infty]{|x|} 0$. Analogo risultato si ottiene studiando il rapporto $|a_{2n+1}|/|b_{2n}|$. Perché anche la y_2 possa verificare la condizione al contorno occorre escludere che sia $|a_{2n+1}|/|b_{2n}| > 1$.

Per assicurarsi che ciò avvenga si usi il seguente procedimento. Dalla (CH) segue che

$$\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} = \frac{(-2)(\varrho - 2n)}{(2n+1)(2n+2)} \qquad \text{insieme con} \qquad \frac{b_{2n+2}}{b_{2n}} = \frac{1}{2(n+1)}\ ;$$

e pertanto

$$\frac{a_{2n+2}/a_{2n}}{b_{2n+2}/b_{2n}} = \frac{(-2)(\varrho - 2n)2(n+1)}{(2n+1)(2n+2)} \longrightarrow\ 2.$$

Si ha allora che per n sufficientemente grande tale rapporto è maggiore ad esempio di $3/2$, e quindi è $a_{2n+2}/b_{2n+2} > \frac{3}{2} a_{2n}/b_{2n}$ dalla quale si ricava, per n maggiori di un qualche n_0, la limitazione: $a_{2n_0+2n}/b_{2n_0+2n} > \left(\frac{3}{2}\right)^n a_{2n_0}/b_{2n_0} > 1$. Se ne conclude che la soluzione $e^{-x^2/2}y_1(x)$ *è inaccettabile a meno che la serie termini*, e cioè a meno che $(\varrho - 2n)$ si annulli per qualche n. Allo stesso modo si riconosce che il secondo addendo della (SH): $e^{-x^2/2}y_2(x)$ diverge all'infinito a meno che $(\varrho - 2n + 1) = 0$ si annulli per qualche n. In definitiva, affinché il problema fisico ammetta soluzione occorre che sia $\varrho \in \mathbb{N}$.

N.B. Questo è un modo di mostrare la condizione $\varrho \in \mathbb{N}$ alternativo a quello che sfrutta l'autoaggiunzione dell'operatore $T^*T = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{dt} + x\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left(+\frac{d}{dt} + x\right)$ nello spazio $\left(L_2(\mathbb{R}),\quad |\psi| \xrightarrow[\infty]{|x|} 0\right)$.

□

Il problema fisico risulta quindi un problema agli autovalori, le cui autofunzioni sono quindi date dalle

$$\psi_m(x) = e^{-x^2/2} H_m(x), \qquad m \in \mathbb{N}$$

ove gli $H_m(x)$ sono i *Polinomi di Hermite*, autosoluzioni delle $(HE.2)$, $(HE.3)$ per $\varrho = 2m$ e $\varrho = 2m + 1$, e dati rispettivamente dalle

$$\begin{cases} H_{2m}(x) = c_{2m} \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{(-2)^k}{(2k)!}(2m)(2m-2)\cdots(2m-2k+2)x^{2k} \\ H_{2m+1}(x) = c_{2m+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{(-2)^k}{(2k+1)!}(2m-1)(2m-3)\cdots(2m-2k+1)x^{2k+1} \end{cases}$$

ove le c_m sono costanti di normalizzazione le quali, per varie ragioni, vengono scelte in modo tale che il termine di grado massimo sia $2^n x^n$, e quindi sono

$$c_{2m} = (-2)^m 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1) \qquad \text{e} \qquad c_{2m+1} = -(-2)^{m+1} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m+1)$$

dei quali i primi valori sono $\{1, -2, -12, 12, 120, \cdots\}$, che forniscono finalmente $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, $H_3(x) = 8x^3 - 12x$, etc.

Alternativamente, detto a_n il termine più alto del polinomio e cioè con $\varrho = n$, si sarebbe potuto anche usare le (CH) per trovare

$$a_{n-2k} = (-1)^k \frac{1}{2^k (2k)!} \frac{n!}{(n-2k)!} a_n$$

ed allora con $a_n := 2^n$ si ottiene

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k}{k!} n! \frac{(2x)^{n-2k}}{(n-2k)!}$$

Si osservi il profondo significato fisico della limitazione trovata per il parametro ϱ; essa rende *discreto numerabile* lo spettro dei valori accettabili per l'energia di un oscillatore armonico descritto dalla equazione di Schrödinger, che pertanto è detto *quantistico*: $\frac{\mathcal{E}}{h\nu} = \frac{1}{2} + n$ con $n = 0, 1, \dots$

□

Si esamini ora un caso di punto singolare regolare.

<u>Esempio 6.6</u> Sia data, su $(0, \infty)$, l'equazione di Bessel:

$$x^2 y'' + x y' + (\lambda^2 x^2 - \varrho^2) y = 0 \ , \qquad \lambda, \varrho \in \mathbb{R} \ . \tag{$BE.1$}$$

Anche questa equazione può essere opportunamente trasformata. Ad esempio, per $u(x) := \sqrt{x} \cdot y(x)$, e quindi per $y' = x^{-1/2} u' - \frac{1}{2} x^{-3/2} u$ ed $y'' = x^{-1/2} u'' - x^{-3/2} u' + \frac{3}{4} x^{-5/2} u$, essa diviene la

$$u'' + \left(\lambda^2 + \frac{1/4 - \varrho^2}{x^2} \right) u = 0 \ ; \tag{$BE.2$}$$

oppure, per $t := \lambda x$, la

$$t^2 \ddot{y} + t \dot{y} + \left(t^2 - \varrho^2 \right) y = 0 \ ; \tag{$BE.3$}$$

così come questa sostituzione trasforma $(BE.2)$ nella

$$\ddot{u} + \left(1 + \frac{1/4 - \varrho^2}{t^2} \right) u = 0 \ . \tag{$BE.4$}$$

Di queste generalmente si cercano soluzioni per $x \in (0, l]$ con $y(0^+) < \infty$ e per $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $y(l) = 0$; (in questo esempio, ϱ è una costante reale fissata apriori).

L'origine è palesemente un punto singolare regolare. Come tale non è possibile sperare *apriori* in soluzioni, analitiche: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n$.

Osservazione

Nel caso $\lambda = 0$, la $(BE.1)$ si riduce alla nota equazione di Eulero, (nella quale le $\widetilde{p}$ e $\widetilde{q}$ sono costanti reali)

$$y'' + \frac{\widetilde{p}}{x}\, y' + \frac{\widetilde{q}}{x^2}\, y = 0 \qquad (EU.1)$$

la quale, con $\xi := \ln x$, e quindi con $D_x = \frac{1}{x} D_\xi$ e $D_x^2 = \frac{1}{x^2}\left(D_\xi^2 - D_\xi\right)$, diviene l'equazione lineare a coefficienti costanti:

$$\frac{d^2}{d\xi}\, y + (\widetilde{p} - 1)\frac{d}{d\xi}\, y + \widetilde{q}\, y = 0\ . \qquad (EU.2)$$

Come è noto, a seconda che le radici della equazione caratteristica:

$$\alpha^2 + (\widetilde{p} - 1)\,\alpha + \widetilde{q} \quad \equiv \quad [\alpha(\alpha-1) + \alpha\widetilde{p} + \widetilde{q}] = 0 \qquad (EC.0)$$

siano distinte, coincidenti, o complesse coniugate, l'equazione $(EU.2)$ ammette soluzioni del tipo $e^{m_1\xi}$ ed $e^{m_2\xi}$, oppure $e^{m\xi}$ ed $\xi e^{m\xi}$, oppure $e^{(\rho+i\theta)\xi}$ ed $e^{(\rho-i\theta)\xi}$, e quindi la $(EU.1)$ avrà in corrispondenza soluzioni contenenti potenze (non necessariamente intere) della x oppure prodotti di queste con logaritmi, oppure potenze della x moltiplicate per funzioni trigonometriche del logaritmo.

$\square$

L'equazione di Bessel è un caso particolare della seguente forma generale (del secondo ordine)

$$y'' + \frac{\widetilde{p}(x)}{x - x_0}\, y' + \frac{\widetilde{q}(x)}{(x-x_0)^2}\, y = 0 \qquad (SR)$$

per la quale il punto x_0 è singolare regolare, e cioè tale che: *i due coefficienti* $p(x) = \widetilde{p}(x)/(x-x_0)$ e $q(x) = \widetilde{q}(x)/(x-x_0)^2$ *possono essere non analitici in* x_0, *ma sono analitiche le due funzioni* $\widetilde{p}(x)$ e $\widetilde{q}(x)$.

Motivati dalla precedente osservazione sull'equazione di Bessel, viene spontaneo cercare soluzioni, nell'intorno di x_0,

o della forma	$y(x) = (x-x_0)^\alpha a(x)$,	$\alpha \in \mathbb{C}$,
oppure della forma	$y(x) = (x-x_0)^\alpha a(x) \ln(x-x_0)$,	$\alpha \in \mathbb{R}$,
dove si è posto	$a(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n (x-x_0)^n$,	$a_0 \neq 0$,

e dove i coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots \in \mathbb{R}$ siano tali che la serie abbia raggio di convergenza non nullo.

La prima di tali rappresentazioni quando α è un numero reale prende il nome di <u>Serie di Frobenius</u>, della quale α è detto l'<u>Esponente indiciale</u>.

Sia, per semplicità, $x_0 = 0$, e siano

$$\widetilde{p}(x) =: \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{p}_n x^n \qquad \text{ed} \qquad \widetilde{q}(x) =: \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{q}_n x^n$$

entrambe analitiche per $|x| < R$.

Si ponga, come tentativo, $y(x) = x^\alpha \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ con $a_0 \neq 0$. È opportuno notare che se $\alpha \neq 0$ il coefficiente a_0 non rappresenta il valore $y(0)$; d'altra parte con le attuali ipotesi il punto $x = 0$ è addirittura non appartenente dal dominio di regolarità del campo. In base alla posizione fatta, risultano

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n) a_n x^{\alpha+n-1} \ , \qquad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n)(\alpha + n - 1) a_n x^{\alpha+n-2}$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{\widetilde{p}(x)}{x}\, y'(x) &= x^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{p}_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n) a_n x^{\alpha+n-1} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \widetilde{p}_{n-k} (\alpha + k) a_k \right) x^{\alpha+n-2} \end{aligned}$$

ed in modo analogo si ha

$$\frac{\widetilde{q}(x)}{x^2}\, y(x) = x^{-2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{q}_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\alpha+n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \widetilde{q}_{n-k} a_k \right) x^{\alpha+n-2} \ .$$

Anche in questo caso si trova una successione di condizioni necessarie:

$$(\alpha + n)(\alpha + n - 1) a_n + \sum_{k=0}^{n} \left(\widetilde{p}_{n-k} (\alpha + k) a_k + \widetilde{q}_{n-k} a_k \right) = 0$$

che dà, per $n \geq 0$ e con la somma presente solo se $n > 0$,

$$\left((\alpha + n)(\alpha + n - 1) + \widetilde{p}_0 (\alpha + n) + \widetilde{q}_0 \right) a_n + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\widetilde{p}_{n-k} (\alpha + k) + \widetilde{q}_{n-k} \right) a_k = 0. \tag{$EC.n$}$$

N.B. La $(EC.n)$ si può paragonare con la (ER)

$$n(n-1) a_n + \sum_{k=0}^{n-2} \left[(k+1) a_{k+1} p_{n-k-2} + a_k q_{n-k-2} \right] = 0, \qquad n \geq 2 \ , \tag{ER}$$

che si è ottenuta per un punto regolare nel quale $\widetilde{p}_0 = \widetilde{q}_0 = \widetilde{q}_1 = 0$; il passaggio da p, q a $\widetilde{p}, \widetilde{q}$ comporta uno spostamento in avanti negli indici: un posto per la p, due per la q; vedi anche la seguente Nota 3.

□

Per rendere più agevole la discussione delle $(EC.n)$ si definisca la funzione

$$\alpha \mapsto ind(\alpha) := \alpha(\alpha - 1) + \widetilde{p}_0 \alpha + \widetilde{q}_0 \ ;$$

la $(EC.n)$ si può riscrivere nella

$$ind(\alpha + n)\ a_n + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\widetilde{p}_{n-k} (\alpha + k) + \widetilde{q}_{n-k} \right) a_k = 0 \ ,$$

e fornisce, in particolare, le

$$\begin{array}{lcl}
(n=0) & \longrightarrow & ind(\alpha)a_0 = 0 \\
(n=1) & \longrightarrow & ind(\alpha+1)a_1 = -(\widetilde{p}_1\alpha+\widetilde{q}_1)a_0 \\
(n=2) & \longrightarrow & ind(\alpha+2)a_2 = -(\widetilde{p}_2\alpha+\widetilde{q}_2)a_0 - (\widetilde{p}_1(\alpha+1)+\widetilde{q}_1)a_1 \\
\dots & & \dots \quad \dots \quad \dots
\end{array}$$

L'assunto $a_0 \neq 0$ rende non ambigua la determinazione dell'esponente α; esso dovrà essere una delle radici della:

Equazione indiciale
$$ind(\alpha) := \alpha(\alpha-1) + \widetilde{p}_0\alpha + \widetilde{q}_0 \ = \ 0 \ . \qquad (IN)$$

Tuttavia non è questa l'unica differenza con il caso dei punti regolari. Diversamente dalla (ER), infatti, le $(EC.n)$ permettono di determinare in modo ricorsivo tutti i coefficienti $a_i = a_i(a_0, a_1, \dots, a_{i-1}) = a_i(\alpha; a_0)$, $i = 1, 2, \dots$, *solo se, in corrispondenza a quel valore di α, non vi sia alcun $\bar{n}$ intero positivo tale che*

$$ind(\alpha+\bar{n}) = (\alpha+\bar{n})(\alpha+\bar{n}-1) + \widetilde{p}_0(\alpha+\bar{n}) + \widetilde{q}_0 = 0 \ .$$

Inoltre, seppure in questa eventualità favorevole, la soluzione che così si determina in corrispondenza della prescelta radice α dell'equazione indiciale (IN) non potrà comunque essere la soluzione generale del problema; essa infatti dipende da una sola costante arbitraria a_0.

Siano α_1, α_2 le radici di $ind(\alpha) = 0$, e si suppongano entrambe reali ed ordinate secondo la $\alpha_1 \geq \alpha_2$. Certamente $ind(\alpha_1 + n)$ sarà non nullo per ogni $n > 0$, infatti l'altra radice di $ind(\alpha) = 0$ è α_2 che, per costruzione, cade a sinistra di α_1. Pertanto *almeno una prima soluzione si potrà trovare con questo metodo*, ed avrà la forma

$$y_1(x) = x^{\alpha_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n}x^n, \qquad \text{con} \quad a_{1,n} = a_{1,n}(\alpha_1; a_{1,0}) \ .$$

È di routine (vedi: [Simmons p.185, opp. Tenenbaum 40.b]) la dimostrazione del fatto che la serie così trovata è convergente almeno all'interno del cerchio di analiticità dei termini $\widetilde{p}$, $\widetilde{q}$. Ne segue che la soluzione $y_1(x)$, analitica o meno a seconda del valore α_1, è certamente definita per $x \in (0, R)$.

Sfortunatamente, siccome la $(EC.n)$ è condizione *necessaria* per gli a_n, si riscontra qui un

Primo caso sfavorevole: se $\alpha_1 = \alpha_2$ non esiste alcun'altra *serie di Frobenius* linearmente indipendente da quella già trovata. Per trovare un'altra soluzione y_2 indipendente dalla y_1, e quindi la soluzione generale del problema, occorrerà inventare qualcos'altro.

Siano $\alpha_2 \neq \alpha_1$. Se è anche $(\alpha_2 - \alpha_1) \notin \mathbb{N}$ allora $ind(\alpha_2 + n)$ è anch'esso non nullo per ogni $n > 0$, e quanto appena fatto a partire dalla α_1 può essere ripetuto per questa seconda radice α_2. Si trova così una seconda serie di Frobenius y_2, la quale per la condizione $(\alpha_2 - \alpha_1) \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ risulta evidentemente indipendente dalla y_1.

Quando invece esiste un intero positivo $\bar{n}$ tale che $\alpha_1 = \alpha_2 + \bar{n}$, allora accade che $ind(\alpha_1) = ind(\alpha_2 + \bar{n}) = 0$ e ciò fa sì che la $(EC.n)$, inizializzata con α_2 e con un qualche a_0, termini con la:

$$0a_{\bar{n}} + \sum_{k=0}^{\bar{n}-1} \left(\widetilde{p}_{\bar{n}-k}(\alpha_2 + k) + \widetilde{q}_{\bar{n}-k}\right) a_k = 0 \ . \qquad (EC.z)$$

Questa eventualità può generare il

<u>*Secondo caso sfavorevole:*</u> $(\alpha_2 - \alpha_1) \in \mathbb{N}$ e $\sum_{k=0}^{\bar{n}-1} \left(\widetilde{p}_{\bar{n}-k}(\alpha_2 + k) + \widetilde{q}_{\bar{n}-k}\right) a_k \neq 0$.

In tal caso la $(EC.z)$ non può essere risolta rispetto ad $a_{\bar{n}}$, ed anche ora occorre inventare qualcos'altro.

Questo caso sfavorevole può però anche non presentarsi. Infatti, se accade che anche la $\sum_{k=0}^{\bar{n}-1} \left(\widetilde{p}_{\bar{n}-k}(\alpha_2 + k) + \widetilde{q}_{\bar{n}-k}\right) a_k$ è nulla, allora *un arbitrario* $a_{\bar{n}}$ *permette di reinnescare il procedimento, e dato che le radici della* $ind(\alpha) = 0$ *sono solo due il metodo è ormai vincente.*

In definitiva, se $(\alpha_2 - \alpha_1) \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ oppure se, essendo $\alpha_1 = \alpha_2 + \bar{n}$ con $\bar{n} \in \mathbb{N}$ è anche $\sum_{k=0}^{\bar{n}-1} \left(\widetilde{p}_{\bar{n}-k}(\alpha_2 + k) + \widetilde{q}_{\bar{n}-k}\right) a_k = 0$, si ottiene una seconda soluzione che è certamente linearmente indipendente dalla prima ed è anch'essa una serie di Frobenius:

$$y_2(x) = x^{\alpha_2} \sum_{k=0}^{\infty} a_{2,n} x^n, \qquad \begin{cases} a_{2,n} = a_{2,n}(\alpha_2; a_{2,0}) & \text{nel primo caso ,} \\ a_{2,n} = a_{2,n}(\alpha_2; a_{2,0}, a_{\bar{n}}) & \text{nel secondo caso .} \end{cases}$$

D'altra parte, quando si impongano sulla $y(x)$ arbitrarie condizioni iniziali si nota che solo due delle tre costanti $a_{1,0}$, $a_{2,0}$, ed $a_{\bar{n}}$ sono realmente arbitrarie.

<u>Nota 3</u> Si osservi, (vedi: [Bender-Orszag p.83]), che l'ultimo caso preso in esame contiene quello dei punti ordinari. Per essi si ha $\widetilde{p}_0 = \widetilde{q}_0 = \widetilde{q}_1 = 0$, e quindi $ind(\alpha) = \alpha(\alpha - 1)$ che fornisce $\alpha_1 = 1$ ed $\alpha_2 = 0$. In questo caso la $(EC.z)$, per $\bar{n} = 1$ ed $\alpha_2 = 0$, fornisce $0a_{2,1} + \sum_{k=0}^{0} (0\widetilde{p}_1 + \widetilde{q}_1)\, a_{2,0} \equiv 0$. Si hanno pertanto: una prima serie di Frobenius $y_1(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n} x^n$, e quindi tale che $y_1(0) = 0$, ed una seconda serie di Frobenius, sicuramente indipendente dalla prima, data da $y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n} x^n$ con $a_{2,0} \neq 0$ ed $a_{\bar{n}} \equiv a_{2,1}$ arbitrario, ad esempio nullo.

Resta a questo punto solo da inventare qualcosa di diverso nei due possibili casi sfavorevoli. Ciò che si sfrutta è il fatto che l'equazione che si sta studiando è del secondo ordine: come si è fatto in precedenza, visto che ormai una soluzione è nota, si tenta di determinarne un'altra con il metodo della variazione della costante moltiplicativa. Posto cioè $y_2 = v y_1$, questa verifica la (SR) *se e solo se* la funzione $u := v'$ è soluzione della

$$y_1(x) u' + \left(\frac{\widetilde{p}(x)}{x} y_1(x) + 2 y_1'(x) \right) u = 0$$

e cioè per $\ln u \equiv \ln v'(x) = -2 \ln y_1(x) - \int^x \frac{\widetilde{p}(\xi)}{\xi} d\xi$. Si ottiene quindi

$$v'(x) = y_1^{-2}(x) \exp\left(- \int^x \frac{\widetilde{p}(\xi)}{\xi} d\xi \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= x^{-2\alpha_1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n}x^n\right)^{-2} \exp\left(-\widetilde{p}_0 \ln x - \widetilde{p}_1 x - \widetilde{p}_2 \frac{x^2}{2} - \cdots\right) \\
&= x^{-(2\alpha_1+\widetilde{p}_0)}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n}x^n\right)^{-2} \exp\left(-\widetilde{p}_1 x - \widetilde{p}_2 \frac{x^2}{2} - \ \cdots\right) \ . \qquad (VP)
\end{aligned}
$$

Si noti che in entrambi i due casi sfavorevoli si ha che $\alpha_1 = \alpha_2 + \bar{n}$ per un qualche $\bar{n} = 0, 1, \ldots$. Tuttavia, siccome α_1, α_2 sono soluzioni dell'equazione indiciale $ind(\alpha) \equiv \alpha^2 - (1 - \widetilde{p}_0)\alpha + \widetilde{q}_0 = 0$, è anche $\alpha_1 + \alpha_2 = (1 - \widetilde{p}_0)$, e quindi si ha $2\alpha_1 + \widetilde{p}_0 = \bar{n} + 1$. Pertanto, il primo dei due fattori della (VP) ha come esponente un numero intero. D'altra parte, tutto il coefficiente di $x^{-(2\alpha_1+\widetilde{p}_0)}$ nella (VP) è senz'altro analitico in zero giacché vale $(a_{1,0})^{-2}$. Con $b_0 \neq 0$ si ottiene allora

$$
v'(x) = x^{-(\bar{n}+1)}\left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots\right) \ ,
$$

da cui

$$
v(x) = \frac{b_0}{-(\bar{n}+1)+1}\, x^{-(\bar{n}+1)+1} + \frac{b_1}{-(\bar{n}+1)+2}\, x^{-(\bar{n}+1)+2} + \ldots \ .
$$

In questa somma, *siccome $\bar{n}+1$ è intero positivo*, ci sarà uno ed un solo termine non algebrico: il termine $b_{\bar{n}} \ln x$. Si ha cioè

$$
y_2(x) = b_{\bar{n}} y_1(x) \ln x + x^{-\bar{n}} y_1(x) \left\{ [v(x) - b_{\bar{n}} \ln x]\, x^{\bar{n}} \right\}
$$

con il termine fra parentesi graffe, e quindi anche il suo prodotto con $y_1(x)$, ormai analitici in zero.

In definitiva, se $\alpha_1 = \alpha_2 + \bar{n}$, risulta, con $c_0 \neq 0$,

$$
y_2(x) = b_{\bar{n}} y_1(x) \ln x + x^{\alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad . \qquad (SL)
$$

Si osservi che se $\alpha_1 = \alpha_2$ si ha $b_{\bar{n}} = b_0$ non nullo per costruzione, e quindi in tal caso il termine logaritmico è sicuramente presente. Può invece essere presente se è $\bar{n} > 0$ ma può anche non esserlo, a dipendere dal fatto che $b_{\bar{n}} \neq 0$ oppure $b_{\bar{n}} = 0$, come nel caso accennato in cui la sommatoria in $(EC.z)$ risulta nulla.

Infine, si consideri il caso $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$. Dall'ipotesi che l'equazione assegnata sia reale segue che anche i coefficienti dell'equazione indiciale sono reali, e pertanto le sue due radici saranno, nel caso, complesse coniugate: $\alpha_1 =: \rho + i\theta$, $\alpha_2 =: \rho - i\theta$. Ricordando l'identità $x^{(\rho+i\theta)} \equiv x^\rho(\cos(\theta \ln x) + i \sin(\theta \ln x))$, lo studio che si è fatto nel primo dei casi esaminati: $\alpha_1 \neq \alpha_2$ può essere ora ripetuto, e dà luogo alle seguenti due serie di Frobenius certamente indipendenti ed atte ad essere determinate con il metodo visto

$$
y_1(x) = +x^\rho \cos(\theta \ln x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad \text{ed} \qquad y_2(x) = +x^\rho \sin(\theta \ln x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \ ;
$$

queste, tuttavia, presentano entrambe una singolarità nel punto singolare regolare.

Si osservi che comunque, in tutti i casi discussi, per trovare esplicitamente i coefficienti delle serie è sicuramente preferibile sostituire la forma ipotizzata per la soluzione direttamente nella equazione di partenza.

ESEMPIO 6.6 L'equazione di Bessel (continuazione)

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \varrho^2)y \ . \qquad (BE.3)$$

Si cerca lo sviluppo nell'intorno dell'origine, e senza imporre la condizione fisicamente significativa $\varrho \in \mathbb{N}$, ma solo supponendo ϱ positiva. L'origine è singolare regolare, con $\widetilde{p}_0 = 1$, $\widetilde{q}_0 = -\varrho^2$, $\widetilde{q}_2 = 1$, e tutti gli altri nulli.

L'equazione indiciale è $\alpha(\alpha-1) + \alpha - \varrho^2 = 0$, che dà $\alpha_{1,2} = \pm\varrho$.
Si inizia lo studio con $\alpha_1 = +\varrho$, e cioè si impone $y_1(x) = x^\varrho \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ con $a_0 \neq 0$. Siccome il raggio di convergenza di $\widetilde{p}(x) = 1$ e di $\widetilde{q}(x) = -\varrho^2 + x^2$ è banalmente infinito, si ha la convergenza ovunque della prima serie di Frobenius. La funzione y_1 è quindi definita su tutto $\mathbb{R}$ dato che, per ipotesi, è $\varrho \geq 0$, ed è addirittura analitica se $\varrho \in \mathbb{N}$. Per trovare i coefficienti a_n basta seguire l'usuale metodo:

$$\begin{aligned} x^2y''(x) &= \sum_{n=0}^\infty a_n(\varrho+n)(\varrho+n-1)x^{\varrho+n} \ ; \\ xy'(x) &= \sum_{n=0}^\infty a_n(\varrho+n)x^{\varrho+n} \ ; \\ x^2y(x) &= \sum_{n=0}^\infty a_n x^{\varrho+n+2} \ . \end{aligned}$$

Per $n \geq 2$ si ritrova la $(EC.n)$, con $\alpha = \alpha_1 = +\varrho$, $\widetilde{p}_0 = 1$, $\widetilde{q}_0 = -\varrho^2$, $\widetilde{q}_2 = 1$, e gli altri tutti nulli; e cioè, con a_0 arbitrario, la

$$\begin{cases} (1+2\varrho)\ a_1 = 0 \ , \\ \left[(\varrho+n)(\varrho+n-1) + (\varrho+n) - \varrho^2\right] a_n + a_{n-2} = 0, \qquad n = 2,3,\ldots \end{cases} \qquad (AN)$$

da cui (si ricordi che è $\varrho \geq 0$) con $a_{-1} := 0$ si ha

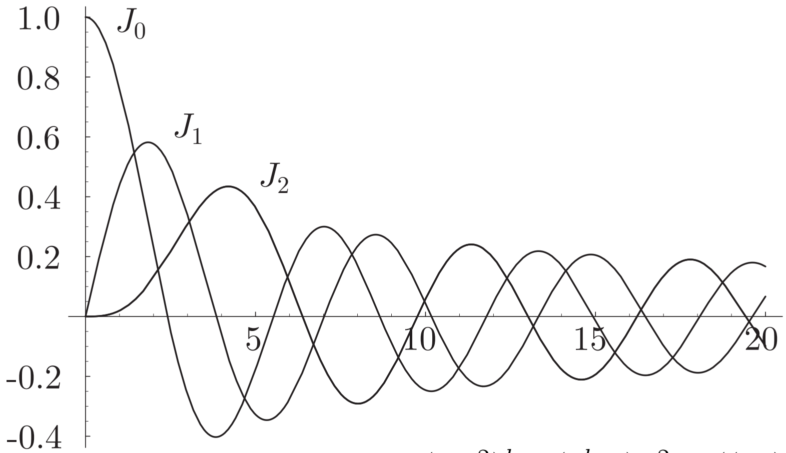
$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2\varrho)} \ , \qquad n = 1,2,\ldots; \qquad a_0 \neq 0 \ .$$

In tal modo, e con $a_{1,0} := a_0$ arbitrario, per i coefficienti della prima Frobenius si ricavano i valori $a_{1,2} = \frac{-a_{1,0}}{2(2+2\varrho)}$; $a_{1,4} = \frac{-a_{1,2}}{4(4+2\varrho)}$; e così via, ovvero

$$a_{1,2k+1} = 0, \qquad a_{1,2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \frac{a_{1,0}}{k!(\varrho+1)\cdots(\varrho+k)}; \qquad k = 1,2,\ldots \ .$$

Scelto in particolare $a_{1,0} := \frac{1}{2^\varrho \varrho!}$ si ha che la prima soluzione, certamente esistente definita e continua su tutto $(0,\infty)$, ed anzi su tutto $[0,\infty)$ giacché $\varrho \geq 0$, resta esplicitamente espressa da:

$$J_\varrho(x) = \frac{x^\varrho}{2^\varrho \varrho!} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \frac{1}{k!(\varrho+1)\cdots(\varrho+k)}\, x^{2k} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{(x/2)^{2k+\varrho}}{k!(\varrho+k)!} \ . \qquad (BP)$$



Curiosità: per $\varrho = 0$ il coefficiente di $(-x^2)^k$ è $(2^k k!)^{-2} = ((2k)!)^{-2}$ e quindi vale $(2^2 \cdot 4^2 \cdots 4k^2)^{-1}$, che può essere paragonato a quello di un coseno che è $((2k)!)^{-1} = (2 \cdot 4 \cdots 2k)^{-1}$.

NOTA 4 Per il momento, quanto scritto qui sopra è privo di significato a meno che non si definisca il simbolo $\varrho!$ nel caso in cui $\varrho \notin \mathbb{N}$.

Esiste una funzione, e precisamente la $\Gamma(\varrho) := \int_0^\infty t^{\varrho-1}e^{-t}dt$ che quando venga calcolata sugli interi positivi ha le stesse proprietà del fattoriale, e cioè

(*i*) $\Gamma(\varrho+1) = \varrho\Gamma(\varrho)$;

(*ii*) $\Gamma(1) = 1$.

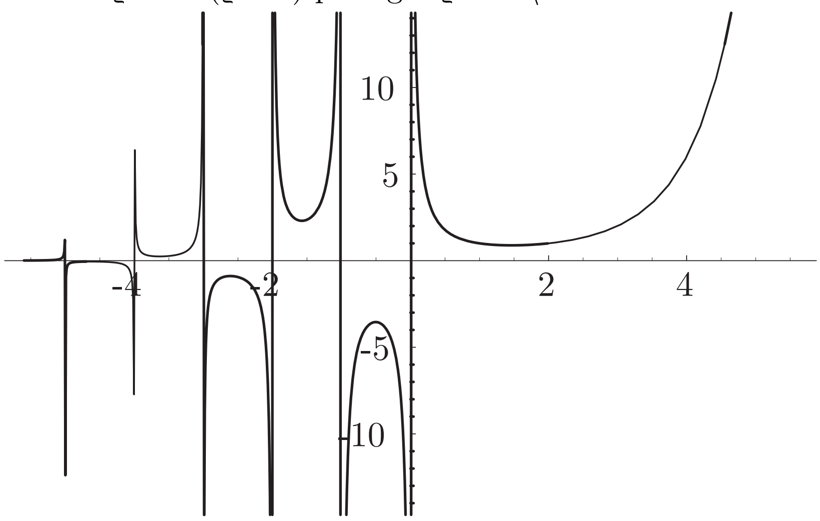
Infatti si nota che

$$\Gamma(\varrho+1) = \lim_{b\to\infty}\int_0^b t^\varrho e^{-t}dt = \lim_{b\to\infty}\left(\Big[-t^\varrho e^{-t}\Big]_0^b + \int_0^b \varrho t^{\varrho-1}e^{-t}dt\right) = \varrho\,\Gamma(\varrho),$$

e pertanto risulta $\Gamma(n+1) = n!$ per $n = 0, 1, \dots$.

D'altra parte Γ è definibile su tutto $\mathbb{R}^+$. Infatti per $\varrho \in [\varepsilon, 1+\varepsilon]$, con $\varepsilon > 0$, la funzione è definita e limitata; e la (*i*) permette di scrivere $\Gamma(\varrho+n) = (\varrho+n-1)(\varrho+n-2)\cdots\varrho\Gamma(\varrho)$ per ogni $\varrho \in (0,1]$, e $n = 1, 2, \dots$. Pertanto la (*i*) stessa può ancora essere usata per definire la $\Gamma(\varrho)$ quando $\varrho \in (-1, 0)$ secondo la $\Gamma(\varrho) := \frac{1}{\varrho}\,\Gamma(\varrho+1)$, e così via procedendo all'indietro.

In definitiva, salvo che sugli interi negativi, la funzione Γ è atta a rappresentare il simbolo fattoriale: $\varrho! := \Gamma(\varrho+1)$ per ogni $\varrho \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}^-$.



□

Mediante la funzione Γ si può scrivere

$$J_\varrho(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\varrho+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\varrho}$$

purché sia $\varrho \neq 0, -1, -2, \ldots$ come è nell'ipotesi: $\varrho > 0$.

Per trovare un'altra soluzione dell'equazione di Bessel, indipendente dalla (BP), si supponga dapprima che sia $\varrho \notin \{0, 1, 2, \ldots\}$, e la si ricerchi della forma $y_2(x) = x^{-\varrho} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Si ricava la

$$\begin{cases} (1-2\varrho)\, a_1 = 0\,, & \\ \left[(-\varrho+n)(-\varrho+n-1) + (-\varrho+n) - \varrho^2\right] a_n + a_{n-2} = 0, & n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Anche in questo secondo caso quindi, la scelta $a_{-1} := 0$ permette di porre nulli tutti i coefficienti di ordine dispari, e di ricavare tutti i coefficienti di ordine pari in funzione dell'unico, arbitrario, primo coefficiente $a_{2,0}$:

$$n(n-2\varrho)a_{2,n} + a_{2,n-2} = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad a_{2,0} \neq 0\,. \qquad (EC.\varrho)$$

Diversamente dal caso precedente, in questo secondo caso il coefficiente $n(n-2\varrho)$ nella $(EC.\varrho)$ potrebbe creare delle difficoltà qualora le radici dell'equazione indiciale fossero tali che $\alpha_1 - \alpha_2 \equiv \varrho - (-\varrho) = 2\varrho \in \mathbb{N}$, e cioè: o quando $\varrho \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, oppure quando esiste $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tale che $\varrho = \frac{1}{2}(2\bar{k}+1)$. È però solo il primo di questi due casi che fa realmente terminare il procedimento ed impedisce che i coefficienti vengano determinati per mezzo della $(EC.\varrho)$. La seconda eventualità infatti potrebbe far terminare la determinazione dei soli coefficienti di ordine dispari e non può impedire, come è stato fatto, che essi siano posti tutti nulli.

In definitiva, se 2ϱ è un intero positivo dispari o non è intero, e cioè se $\varrho \notin \{0, 1, 2, \ldots\}$, dalla $(EC.\varrho)$ si ricavano

$$a_{2,2k+1} = 0; \qquad a_{2,2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \frac{a_{2,0}}{k!(-\varrho+1)\cdots(-\varrho+k)}; \qquad k = 1, 2, \ldots\,.$$

Scegliendo $a_{2,0} = \left(2^{-\varrho}\Gamma(-\varrho+1)\right)^{-1}$ si ottiene un'altra soluzione particolare, e cioè l'altra Frobenius di cui si è parlato sopra:

$$J_{-\varrho}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-\varrho+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\varrho}$$

e siccome questa è non limitata in $x = 0$, (infatti il primo termine è certamente divergente in zero), essa è certo indipendente da J_ϱ. Si osserva che la singolarità in zero è di tipo algebrico.

Rimane la difficoltà $\varrho = m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Applicando a ritroso la $(EC.\varrho)$ si conferma che

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \frac{1}{k!(k-m)!} = 0 \qquad \text{per} \quad k = 0, 1, \ldots, m-1\,,$$

e siccome le relazioni per J_ϱ e $J_{-\varrho}$ danno

$$
\begin{aligned}
J_{-m}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k-m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k-m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{n!(n+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2m-m} = (-1)^m J_m(x)
\end{aligned}
$$

si ha che quando $\varrho \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ la $y_2 \equiv J_{-\varrho}$ non fornisce una soluzione indipendente dalla y_1, e la $y = c_1 J_\varrho + c_2 J_{-\varrho}$ non è la soluzione generale.

Nel caso dell'equazione di Bessel è parso opportuno usare, come seconda soluzione di base nel caso $\varrho \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ e qualora sia necessaria, invece della y_2 logaritmica come visto sopra, la seguente (Bessel di seconda specie)

$$
Y_m(x) := \lim_{\varrho\to m} \frac{J_\varrho(x)\cos\varrho\pi - J_{-\varrho}(x)}{\sin\varrho\pi} .
$$

Si possono constatare le seguenti proprietà delle funzioni di Bessel J_ϱ:

(p1) $\frac{d}{dx}(x^{+\varrho}J_\varrho(x)) = +x^{+\varrho}J_{\varrho-1}(x)$ per $\varrho > 0$;

(p2) $\frac{d}{dx}(x^{-\varrho}J_\varrho(x)) = -x^{-\varrho}J_{\varrho+1}(x)$ per $\varrho > 0$;

(p3) $J_0' = -J_1$;

(p4) $J_\varrho' + \frac{\varrho}{x}J_\varrho = +J_{\varrho-1}$;

(p5) $J_\varrho' - \frac{\varrho}{x}J_\varrho = -J_{\varrho+1}$;

(p6) La $(BE.2)$: $u'' + \left(\lambda + \frac{1/4-\varrho^2}{x^2}\right)u = 0$, con $\varrho^2 = \frac{1}{4}$ e $\lambda = 1$ fornisce alla $(BE.1)$ la soluzione $y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}(c_1\cos x + c_2\sin x)$.
Ma per quanto visto è anche $y = \widetilde{c}_1 J_{\frac12} + \widetilde{c}_2 J_{-\frac12}$ per cui seguono le

$$
\begin{cases}
\sqrt{x}J_{\frac12}(x) = a\cos x + b\sin x \\
\sqrt{x}J_{-\frac12}(x) = c\cos x + d\sin x \ .
\end{cases}
$$

Tuttavia, $\left[\sqrt{x}J_{\frac12}(x)\right]_{x=0} = 0$ per la convergenza di J_ϱ con $\varrho > 0$; e quindi è $a = 0$.
A sua volta, un calcolo diretto fornisce

$$
\left[\sqrt{x}J_{-\frac12}(x)\right]_{x=0} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(-\frac12+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\sqrt{2}\right]_{x=0} = \frac{\sqrt{2}}{(-\frac12)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} = c.
$$

[Si noti che l'ultima uguaglianza proviene dalla $\Gamma(\frac12) = \left(-\frac12\right)! = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t}dt = \int_0^\infty 2e^{-s^2}ds = \sqrt{4\int_0^\infty e^{(x^2+y^2)}dxdy} = \sqrt{4\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty e^{-\varrho^2}r dr d\theta} = \sqrt{\pi}$ per la quale si ha anche $(n-\frac12)! = (\frac12)_n\sqrt{\pi}$].

D'altra parte, mediante la (p1) si ricava la $\frac{d}{dx}(b\sin x) = c\cos x + d\sin x$, da cui seguono $a = d = 0$ e $b = c = \sqrt{2}/\sqrt{\pi}$. In tal modo, e facendo uso della (p7), si conclude che ogni $\sqrt{x}J_{\frac12+m}$ è una combinazione lineare di termini del tipo $\sin x/x^{n_1}$ e $\cos x/x^{n_2}$ con $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, e cioè che è esprimibile con funzioni elementari.

(p7) Sommando (p4) e (p5) si ha $\frac{2\varrho}{x}J_\varrho = J_{\varrho-1} + J_{\varrho+1}$ ed in particolare $J_{n+2} = \frac{2(n+1)}{x}J_{n+1} - J_n$ che permette di esprimere le J_n, per ogni $n \geq 2$, in funzione di J_0 e J_1.

<u>Nota 5</u> Una qualunque equazione della forma

$$x^2y'' + \beta_1 xy' + (\beta_2 + \beta_3 x^{2b})y = 0, \qquad \text{con} \quad \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}, \qquad b > 0, \qquad (E.1)$$

diviene l'equazione $(BE.3)$:

$$z^2w'' + zw' + (z^2 - \varrho^2)w = 0$$

con le posizioni:

$$z := ax^b \ , \quad w(z(x)) := y(x)x^c \ , \quad a := \frac{\sqrt{\beta_3}}{b} \ , \quad c := \frac{\beta_1 - 1}{2} \ , \quad \varrho^2 := \frac{c^2 - \beta_2}{b^2} \ .$$

Infatti, la prima di queste fornisce:

$$\frac{d}{dz} = \left(abx^{b-1}\right)^{-1}\frac{d}{dx} \qquad \text{ed} \qquad \frac{d^2}{dz^2} = \left(abx^{b-1}\right)^{-2}\frac{d^2}{dx^2} - \left(abx^{b-1}\right)^{-2}(b-1)x^{-1}\frac{d}{dx},$$

e sostituendo queste e la w definita come sopra nella $(BE.3)$ si verifica, con un pò di algebra,

$$\begin{aligned} 0 &= a^2x^{2b}\left(\frac{1}{a^2b^2x^{2b-2}}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{(b-1)}{a^2b^2x^{2b-1}}\frac{d}{dx}\right)(yx^c) + \\ &\quad + ax^b\left(\frac{1}{abx^{b-1}}\frac{d}{dx}\right)(yx^c) + (a^2x^{2b} - \varrho^2)(yx^c) \\ &= x^2y'' + (2c+1)xy' + (a^2b^2x^{2b} + (c^2 - \varrho^2b^2))y \ . \end{aligned}$$

□

<u>Nota 6</u> Un'altra famiglia di equazioni dalla forma molto comune è la

$$(t - \beta_1)(t - \beta_2)\ddot{y} + (\beta_3 + \beta_4 t)\dot{y} + \beta_5 y = 0 \qquad (IP.1)$$

con $\beta_1, \ldots \beta_5 \in \mathbb{R}$ e naturalmente con $\beta_1 \neq \beta_2$. Mediante le posizioni:

$$x := \frac{t - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1}, \qquad c := -\frac{\beta_3 + \beta_1\beta_4}{\beta_2 - \beta_1}, \qquad \frac{d}{dt} = \frac{1}{\beta_2 - \beta_1}\frac{d}{dx},$$
$$a + b + 1 := \beta_4, \qquad a\ b := \beta_5,$$

e quindi con

$$-\frac{\beta_3 + \beta_4 t}{\beta_2 - \beta_1} = -\frac{\beta_3 + \beta_4[(\beta_2 - \beta_1)x + \beta_1]}{\beta_2 - \beta_1} = c - (a + b + 1)x,$$

la $(IP.1)$ si trasforma nella <u>Equazione ipergeometrica di Gauss</u>:

$$x(1-x)y'' + (c - (a+b+1)x)y' - aby = 0 \qquad (IP)$$

che ha lo zero e l'unità come punti singolari regolari:

$$\widetilde{p}(x) = xp(x) = \frac{1}{1-x}(c-(a+b+1)x) = (c-(a+b+1)x)(1+x+x^2+\ldots)$$
$$\widetilde{q}(x) = x^2q(x) = \frac{-abx}{1-x} = -abx(1+x+x^2+\ldots)$$

ed analoghe per il punto $x=1$.

Nel punto zero si ha allora, in particolare, $\widetilde{p}_0 = c$, $\widetilde{q}_0 = 0$, e l'equazione indiciale risulta $\alpha(\alpha-1)+c\alpha = 0$ che dà $\alpha_{(1,2)} = (0;\ 1-c)$.

Per quanto visto sopra, *a meno che* $(1-c) \in \{0,1,2,\ldots\}$, una soluzione è certamente

$$y_1(x) = x^0 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad \text{con} \qquad a_0 \neq 0.$$

In tal caso, sostituendo questa espressione nella (IP), si ha

$$(k+1)ka_{k+1}x^k - k(k-1)a_kx^k + c(k+1)a_{k+1}x^k - (a+b+1)ka_kx^k - aba_kx^k = 0$$

da cui per $k = 1,2,\ldots$ si ottiene

$$a_{k+1} = \frac{(k(a+b+k)+ab)}{(k+1)(k+c)}\, a_k = \frac{(a+k)(b+k)}{(k+1)(c+k)}\, a_k\ ,$$

e quindi la ricorrente

$$a_k = \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k k!}\, a_0, \qquad k = 1,2,\ldots\ .$$

La somma y_1 della serie così trovata, con $a_0 = 1$, prende il nome di <u>*Funzione Ipergeometrica di Gauss*</u> e si indica con

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k k!}\, x^k \ =:\ F(a,b,c;x)\ ,$$

definita ed analitica per $|x|<1$, dato che è questo il polo dei coefficienti più vicino all'origine, e sempre che $(1-c) \notin \{0,1,2,\ldots\}$. In particolare è un polinomio se a, b sono interi negativi.

Inoltre, qualora sia $(1-c) \notin \{0,-1,-2,\ldots\}$, c'è anche un'altra soluzione

$$y_2(x) = x^{1-c} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Per trovarla esplicitamente conviene porre $y(x) =: x^{1-c}z(x)$ nella (IP) ed ottenere

$$\begin{aligned}(x(1-x))\left((1-c)(-c)x^{-1-c}z + 2(1-c)x^{-c}z' + x^{1-c}z''\right) + \\ + (c-(a+b+1)x)\left((1-c)x^{-c}z + x^{1-c}z'\right) - abx^{1-c}z \quad = \quad 0\ ,\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}(x(1-x))\,z'' + [2(1-c)(1-x) + c - (a+b+1)x]\,z' + \big[(-c)(1-c)(1-x)x^{-1} + \\ + c(1-c)x^{-1} - (a+b+1)(1-c) - ab\big]\,z = \\ = (x(1-x))\,z'' + [(2-c) - (a+b+1+2-2c)x]\,z' - \\ - [(1-c)(a+b+1-c) + ab]\,z = 0\ ,\end{aligned}$$

che ha soluzione

$$F(a-c+1, b-c+1, 2-c; x)\ .$$

Ne segue

$$y_2(x) = x^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, 2-c; x)$$

e si noti che $1-(2-c) \notin \mathbb{N}$ per l'ipotesi che sia $(1-c) \notin \{0,-1,-2,\ldots\}$.

Tutto ciò è valido in un intorno dello zero. Se si vuole uno sviluppo valido nell'intorno di $x = 1$ basta porre $t := (1-x)$ nella (IP) ed ottenere la

$$t(1-t)\ddot{y} + [(a+b+1-c) - (a+b+1)t]\,\dot{y} - aby = 0$$

da cui, sempre che $(c-a-b) \notin \mathbb{N}$, segue

$$y(t) = c_1F(a, b, a+b+1-c; t) + c_2F(c-b, c-a, c-a-b+1; t)\ .$$

□

La flessibilità delle funzioni ipergeometriche è notevole:

<u>Esempio 6.7</u>

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(-\alpha)_k}{k!}x^k = F(-\alpha, 1, 1; -x)$$

□

<u>Esempio 6.8</u> La funzione $\dfrac{\ln(1+x)}{x} =: y$ verifica l'equazione

$$y' = \frac{\frac{x}{1+x} - \frac{y}{x}}{x^2} \qquad \text{e quindi} \qquad x(1+x)y'' + (2+3x)y' + y = 0\ .$$

Questa è del tipo (IP) con variabile indipendente $-x$ e con

$$ab = 1, \quad a+b+1 = 3, \qquad c = 2\ .$$

Ne segue la soluzione particolare

$$\ln(1+x) \ = \ x\ F(1, 1, 2; -x)\ .$$

□

<u>Esempio 6.9</u> (vedi esempio Nota 1)

$$\arcsin x \ = \ x\ F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; x^2\right)\ .$$

□