

APPUNTI di FISICA SPERIMENTALE

Ingegneria Elettrica e Meccanica 2008-2009

- premessa: il metodo sperimentale
- misurazione di grandezze fisiche
- caratteristiche degli strumenti di misura
- sistemi di unità di misura
- analisi dimensionale
- analisi delle incertezze
 - incertezze
 - rappresentazione e utilizzo delle incertezze
 - propagazione delle incertezze
 - tipi di incertezze sperimentali
- concetti base di statistica
- distribuzione normale
- livelli di confidenza
- metodo dei minimi quadrati

**La Fisica si fonda sul metodo sperimentale (galileiano):
il criterio di verità è il risultato dell'osservazione e
dell'esperienza**

Premesse del metodo sperimentale:

- premessa filosofica: i fenomeni naturali si svolgono sempre con le stesse modalità quando vengono mantenute le medesime condizioni iniziali
- premessa tecnica: è possibile modificare con accorgimenti tecnici opportuni la scala dei fenomeni in modo da non alterarne la legge pur rendendoli accessibili alla misurazione (o osservazione)
- premessa matematica: una legge naturale è ritenuta vera se le conseguenze logiche che da essa si ricavano matematicamente vengono riscontrate nella realtà

Una teoria fisica è un insieme coerente di leggi mediante
le quali è possibile enunciare affermazioni
empiricamente verificabili

Il rapporto teoria-esperimento è dialettico

Nello studio dei fenomeni ci si chiede COME e PERCHE' essi avvengano.

L'ORDINE di queste domande è importante!!

- Filosofia greca }
- Teologie } PERCHE'? ⇒ Modello mentale del mondo
Schema aprioristico delle cose

Es.: Aristotele: perché cadono i corpi?

“perché ciascun corpo cerca la sua sede naturale...”

Galileo: COME? ⇒ Sperimentazione quantitativa

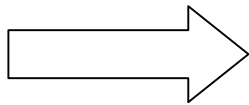
“... il grande libro della natura è scritto in linguaggio matematico...”

Metodo galileiano: studio di un fenomeno naturale

- osservazione, descrizione, confronto con altri fenomeni analoghi, classificazione
- analisi delle circostanze in cui il fenomeno si verifica e dei fattori che lo condizionano \Rightarrow individuazione degli aspetti fondamentali
- prova e riprova del fenomeno, nelle condizioni più semplici possibili, anche in modo artificiale (elevato numero di prove con eventuali variazioni)
- espressione numerica dei parametri che caratterizzano il fenomeno (es. creazione di tabelle)
- formulazione quantitativa: studio della correlazione tra i parametri \Rightarrow ricerca della legge che regola il fenomeno

Osservazione: interazione tra osservatore e sistema osservato

L'informazione è relativa allo stato del sistema *DURANTE* l'osservazione, a rigore non necessariamente uguale a quello *PRIMA* dell'osservazione



Ricerca dei metodi che minimizzino la perturbazione sul sistema osservato

La perturbazione può essere ridotta a zero?

Fisica classica: SI

Fisica quantistica: NO
(principio di indeterminazione di Heisenberg)

GRANDEZZE FISICHE DEFINITE OPERATIVAMENTE

Per la descrizione di un fenomeno si devono usare solo quei parametri che sono trasformabili in numeri con la misurazione, cioè quei termini che sono definibili *OPERATIVAMENTE*, attraverso l'operazione metrica di *MISURAZIONE* (anche solo ideale) e che chiamiamo *GRANDEZZE FISICHE*.

Esempi: massa, forza, lunghezza di un segmento, durata di un intervallo temporale.....

Il processo di misurazione è quindi alla base di ogni scienza sperimentale

Consideriamo un insieme di enti omogenei tra loro (es. insieme di cariche elettriche, di masse, ecc.). Tale insieme costituisce un insieme di grandezze fisiche se:

- presi due enti a caso A e B , si è sempre in grado di dire se $A > B$, $A < B$ o $A = B$ [*criterio di confronto*]
- si può definire la somma $A + B$ [*criterio di somma*]
- si può definire uno degli enti come unità di misura
[*campione unitario*]



Si può definire **misurazione** (misura) di una grandezza fisica il numero che rappresenta il rapporto tra la grandezza considerata e quella fissata come unità.

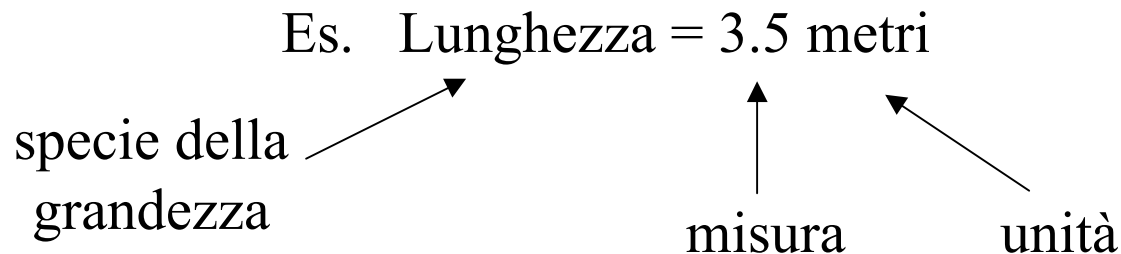
La misurazione di una grandezza può essere fatta in tre modi:

- 1) misurazione diretta
- 2) misurazione indiretta
- 3) misurazione con strumenti tarati

1) **misurazione diretta**

- i) confronto mediante un opportuno strumento di una grandezza G con un'altra della stessa specie $[g]$ scelta come unità
- ii) determinazione di quante volte G contiene $[g]$ o una sua frazione.

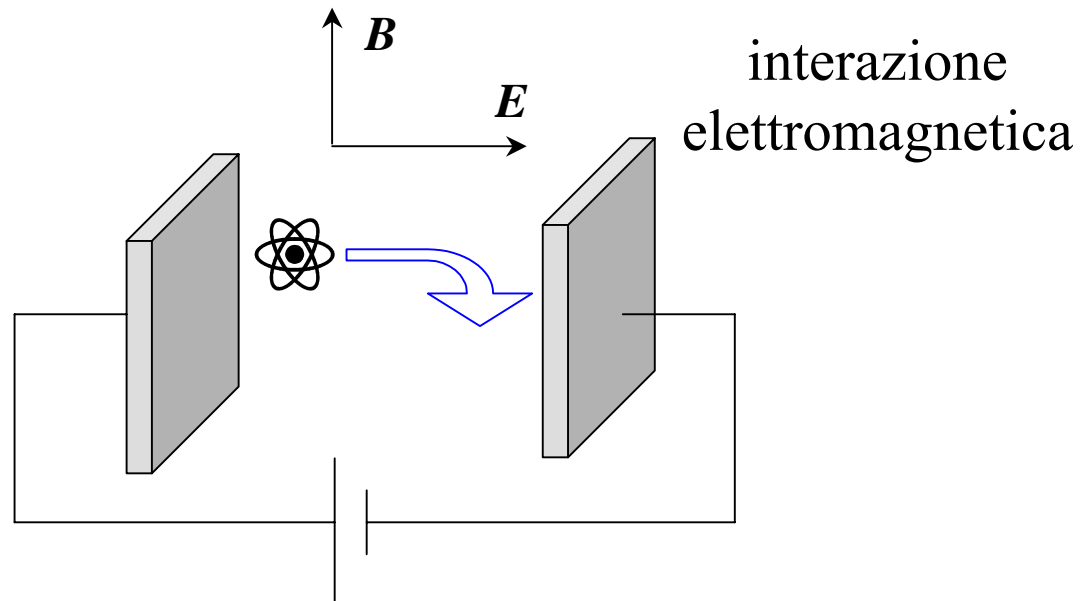
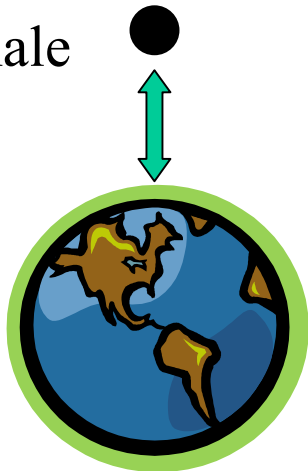
La misura diretta di una grandezza è sempre un numero positivo razionale



2) **misurazione indiretta**

Es. la massa di un oggetto è una grandezza che si può misurare direttamente con una bilancia. Tuttavia, se si volesse misurare la massa di un corpo celeste o di una particella piccola quale un atomo, è ovviamente impossibile utilizzare uno strumento quale la bilancia. Allora si fa ricorso ad una qualche relazione nota tra le masse di questi ed altre grandezze misurabili direttamente, e poi si risale dalle misure di queste a quella della massa in questione.

interazione
gravitazionale



In generale, se la grandezza y è una funzione conosciuta delle grandezze di specie diverse x_1, x_2, \dots, x_n tutte misurabili direttamente

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Si effettuano misure di x_1, x_2, \dots, x_n e, mediante la relazione, si risale alla misura di y .

Esempio: sapendo che l'area S del rettangolo di lati a e b è data da $S = ab$, per ottenere il valore dell'area si effettua la misura dei lati e si moltiplicano i risultati tra loro.

Misurare una grandezza fisica indirettamente significa:

- trovare una legge fisica che la leghi ad altre grandezze misurabili direttamente
- eseguire tali misure
- sfruttare la relazione per calcolare il numero che esprime la misura cercata

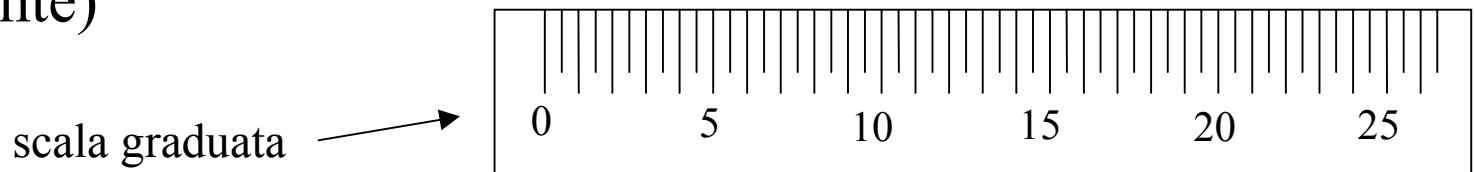
3) **misurazione con strumenti tarati**

Lo strumento tarato è in grado di stabilire una corrispondenza biunivoca tra il valore di una certa grandezza fisica da misurare e un numero che si legge sullo strumento.

Esempi: bilancia, amperometro, voltmetro, cronometro, ecc.

L'uso degli strumenti tarati elimina l'inconveniente di disporre dell'unità campione nel caso di misurazione diretta, e della necessità di conoscere la relazione $y = f(x_1, \dots, x_n)$ nel caso di misura indiretta.

Ogni strumento è caratterizzato da una **curva di taratura o calibrazione**: funzione che pone in corrispondenza biunivoca il numero letto sulla scala con il valore della grandezza da misurare. Quando questa curva è una retta, lo strumento si dice lineare (la distanza tra 2 graduazioni successive è costante)

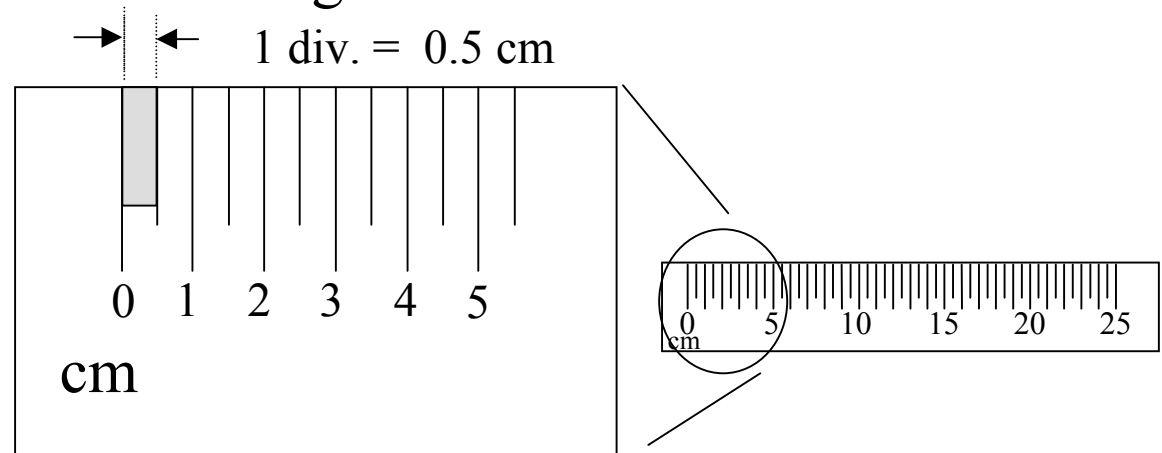


Caratteristiche degli strumenti di misura

Le principali caratteristiche di uno strumento sono: sensibilità, precisione, portata, prontezza

sensibilità

- def. I: è un parametro legato alla variazione minima apprezzabile Δy della grandezza in esame $\Rightarrow S_y = 1/|\Delta y|$
- def. II: rapporto tra lo spostamento Δx dell'indice sulla scala e la variazione Δy della grandezza da misurare $\Rightarrow s = \Delta x/\Delta y \Rightarrow dx/dy$
- le due definizioni coincidono se $\Delta x = 1$ divisione (strum. digitali)
- può essere costante o variare lungo la scala a seconda che la scala sia lineare oppure no



- la sensibilità di uno strumento può essere aumentata sia agendo sulla struttura meccanica o elettromagnetica dell'elemento sensibile, sia intervenendo con opportuni artifici sulle condizioni di lettura (amplificazione degli spostamenti dell'indice, sistemi ottici per apprezzare meglio la posizione dell'indice sulla scala,....)
- la sensibilità non può essere aumentata a dismisura perché gli errori casuali di misura si fanno maggiormente sentire al crescere della sensibilità dello strumento, rendendo più incerte le letture.

precisione

il concetto di precisione è connesso al concetto di incertezza di misura

spesso viene definita come la somma dei valori assoluti degli errori percentuali di lettura derivanti da difetti di costruzione, taratura e funzionamento dello strumento stesso

Esempio: la bilancia

fonte di imprecisione di tipo costruttivo: disuguaglianza dei due bracci del giogo ($\rightarrow \Delta L/L$)

fonte di imprecisione di tipo funzionale: instabilità dello zero per attriti tra i coltelli e i piani di appoggio

errore con cui sono state realizzate le masse campione ($\rightarrow \Delta M/M$)

errori casuali dovuti a impercettibili variazioni nelle condizioni di misura

$$\Rightarrow P = \left| \frac{\Delta L}{L} \right| + \left| \frac{\Delta M}{M} \right| + \dots + \left| \frac{\Delta m_x}{M} \right| + \dots \quad (\rightarrow \Delta m_x/M)$$

portata

la portata di uno strumento rappresenta l'ampiezza massima della grandezza misurabile per mezzo dello strumento stesso

prontezza

la prontezza è data dalla rapidità con cui lo strumento è in grado di eseguire la misura o di seguire le variazioni nel tempo della grandezza in esame

Sistemi di unità di misura

Le grandezze fisiche sono numerosissime : lunghezza, durata temporale, massa, velocità, accelerazione, frequenza, carica elettrica, intensità di corrente, ecc.

Non è conveniente scegliere un'unità di misura per ognuna di esse. Conviene invece sfruttare le correlazioni tra le varie grandezze, fissare unità di misura solo per alcune di esse e utilizzare le suddette correlazioni per definire le altre unità.

unità di misura **fondamentali**: specie di grandezze per le quali vengono fissate le unità

unità di misura **derivate**: specie che vengono ricavate dalle fondamentali

Sistema Internazionale (S.I.)

E' il più diffuso sistema di unità di misura costituito dall'insieme delle unità di misura delle grandezze fondamentali

	Grandezze	Unità	Simbolo
Fondamentali	Lunghezza	Metro	m
	Massa	Kilogrammo	kg
	Intervallo di tempo	Secondo	s
	Intensità di corrente elettrica	Ampère	A
	Temperatura	Kelvin	K
	Intensità luminosa	Candela	cd
	Quantità di materia	Mole	mol
Supplementari	Angolo piano	Radiante	rad
	Angolo solido	Steradiante	sr

Per ogni unità di misura si realizzano dei **campioni** le cui caratteristiche devono essere facilmente riproducibili in qualunque luogo e ben conservabili.

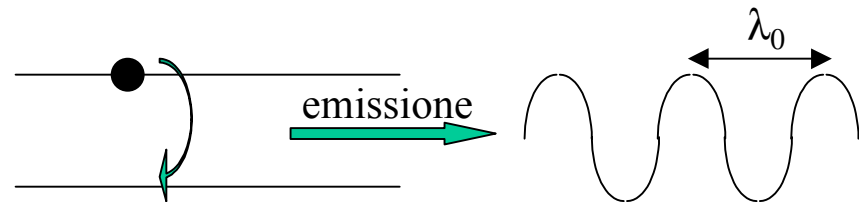
(preferibilmente legate a COSTANTI NATURALI)

Esempio: il metro

campione: sbarra di una lega di platino-iridio, mantenuto alla temperatura di 0 °C

(dopo il 1960): lunghezza d'onda λ_0 nel vuoto della radiazione corrispondente alla transizione tra i livelli $2p_{10}$ e $5d_5$ dell'atomo di Krypton-86.

$$1\text{m}=1650763.73 \lambda_0$$



(dopo il 1985): lunghezza del cammino percorso nel vuoto dalla luce in un intervallo di tempo di $(1/299792458)$ s

Dimensione di una grandezza fisica

In generale, supponiamo che un sistema di unità di misura comprenda le grandezze fondamentali: X_1, X_2, \dots, X_n

Sia G una grandezza derivata e si verifichi che, quando moltiplichiamo le unità delle grandezze fondamentali rispettivamente per K_1, K_2, \dots, K_n , l'unità di G risulta moltiplicata per $K_G = K_1^{\alpha_1} K_2^{\alpha_2} \dots K_n^{\alpha_n}$

Diremo allora che la grandezza G ha la dimensione α_1 rispetto a X_1 , la dimensione α_2 rispetto a X_2 , ecc.

Si può scrivere l'**equazione dimensionale**

$$[G] = [X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_n^{\alpha_n}]$$

Esempi

Indichiamo con L, M, T, rispettivamente la lunghezza, la massa e l'intervallo di tempo (grandezze fondamentali nel SI)

dalla relazione $v=\Delta s/\Delta t$, che definisce la velocità media, risulta l'equazione dimensionale

$$[v]=[LT^{-1}]$$

Così, per l'accelerazione, la forza e l'energia cinetica:

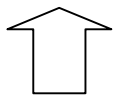
$$a=\Delta v/\Delta t \quad [a] = [LT^{-2}]$$

$$F=m a \quad [F] = [MLT^{-2}]$$

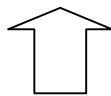
Newton (1N=1 kg m s⁻²)

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \quad [K] = [ML^2T^{-2}]$$

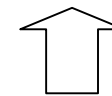
Joule (1J=1 kg m² s⁻²)



relazione



equazione dimensionale



unità di misura

Le equazioni dimensionali consentono di fare **l'analisi dimensionale** delle relazioni fisiche: sostituendo a ciascuna grandezza le sue dimensioni, e trattando i simboli delle grandezze fondamentali come quantità algebriche, la relazione può essere valida solo se ciascun membro della relazione stessa ha le medesime dimensioni (**principio di omogeneità**)

Se le dimensioni della grandezza a primo membro non sono le stesse di quella che compare al secondo membro la relazione è sicuramente sbagliata (non è detto il contrario)

L'analisi dimensionale consente inoltre la conversione delle misure da un sistema di unità ad un altro

Si sostituisce a ciascuna unità del vecchio sistema la corrispondente unità del nuovo moltiplicata per un **fattore di conversione**

Esempi

Controllare dimensionalmente l'equivalenza tra impulso e quantità di moto

$$\int_{t_0}^t F dt = \int_{v_0}^v d(mv) \quad \text{impulso: } [F t] = [MLT^{-2}][T] = [MLT^{-1}]$$

quantità di moto: $[mv] = [MLT^{-1}]$ OK!

Supponiamo di voler esprimere in km/h la velocità di un'automobile che viaggia a 12.5 ms^{-1} .

Poiché $1 \text{ m} = 10^{-3} \text{ km}$ e $1 \text{ s} = (1/3600) \text{ h}$

$$v = 12.5 \frac{m}{s} = 12.5 \frac{10^{-3} km}{(1/3600)h} = 12.5 \cdot 3.6 km/h = 45 km/h$$

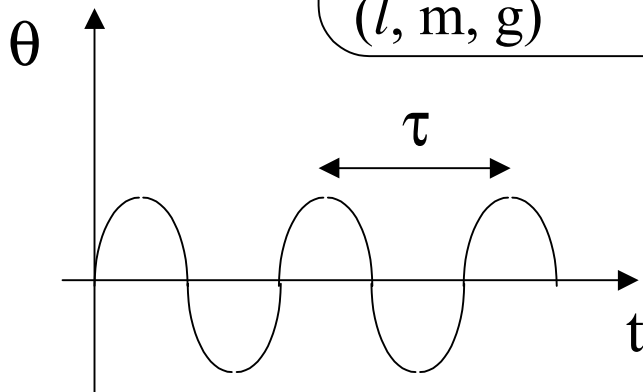
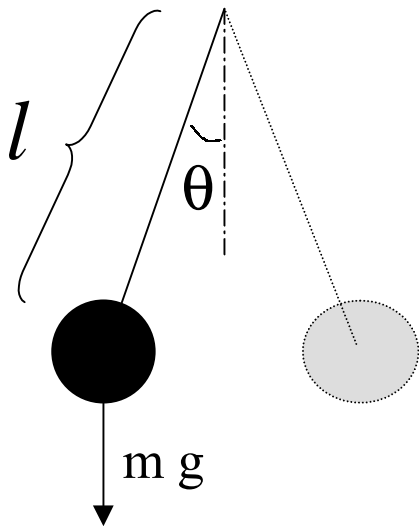
Supponiamo che un corpo abbia energia cinetica 1.5 J. Nel sistema CGS (in cui $L \longleftrightarrow \text{cm}$, $M \longleftrightarrow \text{g}$, $T \longleftrightarrow \text{s}$) la sua energia sarà data da

$$K = 1.5 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} = 1.5 (10^3 \text{ g})(10^2 \text{ cm})^2 \text{ s}^{-2} = 1.5 \cdot 10^7 \text{ g cm}^2 \text{ s}^{-2}$$

Attraverso considerazioni di analisi dimensionale è possibile dedurre informazioni sulla forma algebrica delle leggi fisiche

Esempio: **il pendolo semplice**

dipendenza funzionale del periodo di oscillazione τ dalle grandezze fisiche che possono contribuire al fenomeno (l, m, g)



$$\tau \propto \sqrt{\frac{l}{g}}$$

In generale

$$\tau = \alpha m^\beta l^\gamma g^\delta$$

eq. dimensionale $[T] = [M^\beta L^{\gamma+\delta} T^{-2\delta}]$

$$([g] = [LT^{-2}])$$

$$\begin{cases} \beta=0 \\ \gamma+\delta=0 \\ -2\delta=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta=0 \\ \gamma=1/2 \\ \delta=-1/2 \end{cases}$$

ANALISI DELLE INCERTEZZE (ERRORI)

L'analisi degli errori è lo studio e il calcolo dell'incertezza nella misura. Nessuna misura può essere completamente libera da incertezze.

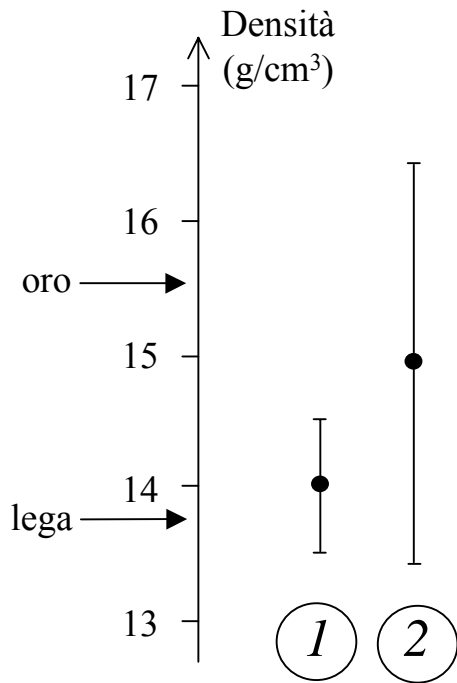
Poiché l'intera struttura della scienza dipende dalle misure sperimentali, è di importanza fondamentale essere capaci di calcolare queste incertezze e di ridurle al minimo

In questo caso **ERRORE** \neq "SBAGLIO" \Rightarrow si preferisce la dizione "INCERTEZZA"

Le incertezze non si possono evitare totalmente operando con molta cura. Infatti, alcune sorgenti di errore sono intrinseche al processo di misura e non possono pertanto essere eliminate del tutto. E' comunque importante poterle stimare.

Importanza di conoscere le incertezze

Esempio: misura della densità di un oggetto al fine di stabilire se è composto di oro a 18 carati o di una lega meno costosa



Si nota che:

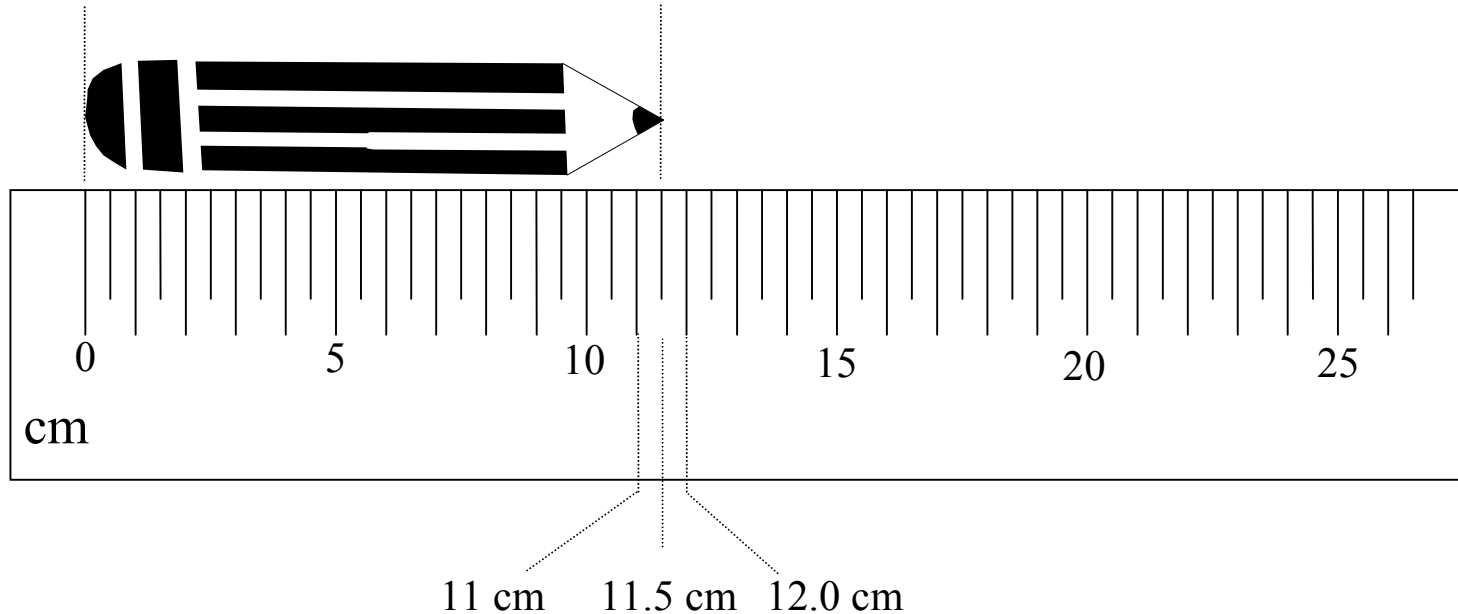
1. è probabile che entrambe le misure siano corrette
2. la misura (2) è “inutile”, anche se sembrerebbe suggerire che l’oggetto è d’oro
3. la misura (1) consente di concludere che l’oggetto è composto dalla lega

Perché le misure permettano di trarre una conclusione le incertezze sperimentali non devono essere troppo grandi (ma non è necessario che siano estremamente piccole).

Entrambe le misure sarebbero inutili se gli sperimentatori non avessero incluso affermazioni realistiche (e verificabili) sulle loro incertezze

Stima delle incertezze nella lettura di scale

i) Misura di lunghezza

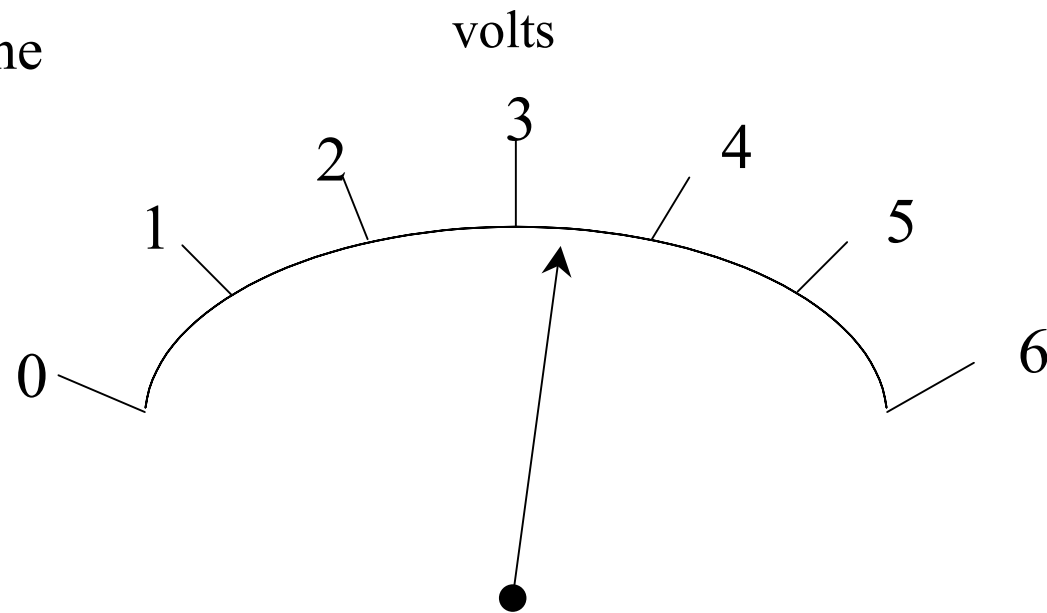


Nel caso in cui la punta della matita sia più vicina alla tacca degli 11.5 cm piuttosto che a quella degli 11.0 cm o dei 12.0 cm

Migliore stima della lunghezza = 11.5 cm

Intervallo probabile: da 11.25 a 11.75 cm

ii) Misura di tensione



La spaziatura tra le tacche è grande, quindi si può realisticamente stimare dove giace l'ago nello spazio tra le due divisioni

Migliore stima della tensione = 3.2 V

Intervallo possibile = da 3.1 V a 3.3 V

Il procedimento di valutare la posizione tra le incisioni di una scala è detta **interpolazione**

Stima delle incertezze nelle misure ripetibili

(misura di un intervallo di tempo)

Se utilizziamo un cronometro, la principale sorgente di incertezza non è la difficoltà di leggere il quadrante, ma il tempo di reazione (incognito) nel far partire ed arrestare il cronometro.

Questo genere di incertezze possono essere ragionevolmente stimate qualora si ripeta la misura parecchie volte.



esempio
2.3 s 2.4 s 2.5 s 2.4 s

La dispersione dei valori dà un'indicazione dell'incertezza

Miglior stima del periodo: 2.4 s (valor medio)

Intervallo probabile: da 2.3 s a 2.5 s

Valore misurato del periodo = $(2.4 \pm 0.1) \text{ s}$
miglior stima

incertezza

(è una valutazione “grossolana”; i metodi statistici danno una stima dell'incertezza più accurata)

Rappresentazione di un risultato: *stima migliore* \pm *incertezza*

Cifre significative

L'ultima cifra significativa in qualunque risultato dovrebbe essere dello stesso ordine di grandezza (nella stessa posizione decimale) dell'incertezza.

Esempio: il risultato 92.81

con un errore di 0.3, dovrebbe essere arrotondato a 92.8 ± 0.3

con un errore di 3, dovrebbe essere arrotondato a 93 ± 3

con un errore di 30, dovrebbe essere arrotondato a 90 ± 30

Le incertezze dovrebbero essere arrotondate a una o al massimo due cifre significative

In ogni caso, i numeri che devono essere usati nei calcoli dovrebbero in generale essere tenuti con più cifre significative rispetto a quelle richieste per il risultato finale. L'arrotondamento è bene farlo al termine dei calcoli.

Discrepanza

se due misure della stessa grandezza sono diverse, allora vi è una discrepanza. La discrepanza può essere o non essere significativa.

Esempio: misura di una resistenza elettrica

Due operatori misurano la stessa resistenza ed ottengono

$$(40 \pm 5) \text{ ohm} \quad \text{e} \quad (42 \pm 8) \text{ ohm}$$

La discrepanza $(42-40) \text{ ohm} = 2 \text{ ohm}$ è minore delle loro incertezze

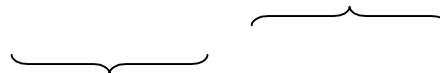
⇒ le 2 misure sono **consistenti**



Nel caso in cui si ottenga

$$(35 \pm 2) \text{ ohm} \quad \text{e} \quad (45 \pm 1) \text{ ohm}$$

La discrepanza $(45-35) \text{ ohm} = 10 \text{ ohm}$ è maggiore delle loro incertezze ⇒ le 2 misure sono **inconsistenti**



Valore vero (di una grandezza fisica)

Qual è il “valore vero” di una grandezza fisica?

Esiste un “valore vero” di una grandezza fisica?

Non vi sono risposte semplici e soddisfacenti. E' comunque molto conveniente assumere che ogni grandezza fisica abbia un valore vero.

E' *un* valore che si dovrebbe poter ottenere da una misura perfetta (possono esistere svariati valori consistenti con la definizione di una data grandezza).

Il valore vero è, per sua natura,
COMPLETAMENTE INDETERMINATO

“valore accettato” o “valore convenzionale”

per grandezze che sono state accuratamente misurate molte volte in precedenza, vi è in genere un “valore accettato” (molto più accurato di quello che lo studente può determinare), pubblicato sui libri. Esso è comunque affetto da incertezza (\neq da “valore vero”).

Esempi: $c = 299792458 \pm 1 \text{ m/s}$

$g \text{ (a Torino)} = 9.80549 \pm 0.00005 \text{ m/s}^2$

Confronto di valori misurati ed accettati.

Esempio: velocità del suono nell'aria

velocità accettata = 331 m/s

velocità misurata = $329 \pm 5 \text{ m/s}$ OK

velocità misurata = $345 \pm 2 \text{ m/s}$ verificare misure e calcoli

Incertezza (o errore) relativo

$$(\text{valore misurato di } x) = x_{best} \pm \delta x$$

dove x_{best} = miglior stima per x

δx = incertezza o errore nella misura

$$\text{errore relativo} = \frac{\delta x}{|x_{best}|} \quad (\text{errore percentuale} = \frac{\delta x}{|x_{best}|} 100 \%)$$

L'errore relativo è un'indicazione approssimata della qualità di una misura

Ad esempio, per il nostro corso di laboratorio:

errore relativo $\geq 10\%$

misura “rozza”

errore relativo $< 10\%$

misura accurata

PROPAGAZIONE DELLE INCERTEZZE

La maggior parte delle grandezze fisiche non possono di solito essere misurate in una singola misura diretta.

In generale, se la grandezza q è una funzione conosciuta delle grandezze di specie diverse x, \dots, w tutte misurabili direttamente

$$q = f(x, \dots, w)$$

si effettuano misure di x, \dots, w e, mediante la relazione, si risale alla misura di q .

Occorre stimare le incertezze nelle grandezze x, \dots, w e quindi trovare come questi errori si **propagano** attraverso i calcoli per produrre un'incertezza nel risultato finale.

Esempio: somma di due grandezze

Misurate le due grandezze x e y e ottenute le due stime $\begin{cases} x_{best} \pm \delta x \\ y_{best} \pm \delta y \end{cases}$

il più alto valore probabile di $q=x+y$ è $(x_{best} + y_{best}) + (\delta x + \delta y)$

il più basso valore probabile di $q=x+y$ è $(x_{best} + y_{best}) - (\delta x + \delta y)$

quindi:

$$q_{best} = (x_{best} + y_{best}) \quad \text{e} \quad \delta q \approx (\delta x + \delta y)$$

Quindi se le grandezze misurate sono sommate o sottratte “gli errori si sommano”. Si può analogamente mostrare che se le grandezze sono moltiplicate o divise, “gli errori relativi si sommano”

In realtà si dimostra che le incertezze così calcolate possono essere sovrastimate, specificatamente nel caso che gli errori originari siano “indipendenti” e “casuali”.

In ogni caso determinano un limite superiore per l'incertezza. Vedremo che se le misure di x e y sono fatte indipendentemente e sono entrambe governate dalla distribuzione normale, allora gli errori vanno “sommati quadraticamente”

Se q è la somma e differenza, $q = x + \dots + z - (u + \dots + w)$

$$\delta q \left\{ \begin{array}{l} \approx \delta x + \dots + \delta z + \delta u + \dots + \delta w \quad (\text{limite superiore per } \delta q) \\ = \sqrt{(\delta x)^2 + \dots + (\delta z)^2 + (\delta u)^2 + \dots + (\delta w)^2} \\ \quad (\text{per errori indipendenti e casuali}) \end{array} \right.$$

Se q è il prodotto e quoziente, $q = \frac{x \dots z}{u \dots w}$

$$\frac{\delta q}{|q|} \left\{ \begin{array}{l} \approx \frac{\delta x}{|x|} + \dots + \frac{\delta z}{|z|} + \frac{\delta u}{|u|} + \dots + \frac{\delta w}{|w|} \quad (\text{limite superiore per } \delta q/q) \\ = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\delta z}{z}\right)^2 + \left(\frac{\delta u}{u}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\delta w}{w}\right)^2} \\ \quad (\text{per errori indipendenti e casuali}) \end{array} \right.$$

Se $q = B x$, dove B è noto esattamente, allora

$$\delta q = |B| \delta x$$

Se q è una funzione di una variabile, $q(x)$, allora

$$\delta q = \left| \frac{dq}{dx} \right| \delta x$$

Se q è una potenza, $q = x^n$, allora

$$\frac{\delta q}{|q|} = |n| \frac{\delta x}{|x|}$$

Se q è una funzione di parecchie variabili, x, \dots, z , allora

$$\delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x} \delta x \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial q}{\partial z} \delta z \right)^2}$$

(per errori indipendenti e casuali)

Esempio: misura di g con un pendolo semplice

Periodo del pendolo: $T = 2\pi\sqrt{l/g}$

Se l e T vengono misurati, si può ricavare g come $g = 4\pi^2 l/T^2$

L'errore in T^2 è il doppio che in T : $\frac{\delta(T^2)}{T^2} = 2\frac{\delta(T)}{T}$

L'errore in g sarà: $\frac{\delta g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\delta l}{l}\right)^2 + \left(2\frac{\delta T}{T}\right)^2}$

Esempio: supponiamo di aver misurato un angolo θ come

$$\theta = (20 \pm 3)^\circ$$

e di voler calcolare il $\cos\theta$: qual è la sua migliore stima?

$$\Delta(\cos\theta) = |d(\cos\theta)/d\theta| \cdot \Delta\theta = \sin\theta \cdot \Delta\theta \text{ (in rad)}$$

$\Delta\theta$ deve essere espressa in radianti, poiché la derivata di $\cos\theta$ è $-\sin\theta$ solo se θ è espresso in radianti.

$$\text{Quindi } \Delta\theta = 3^\circ = 3 \cdot (\pi/180) = 0.05 \text{ rad}$$

$$\Delta(\cos\theta) = \sin(0.35 \text{ rad}) \cdot 0.05 = 0.34 \cdot 0.05 = 0.02$$

$$\cos\theta = \cos(0.35) \pm 0.02 = 0.94 \pm 0.02$$

Esempio: un fascio luminoso di intensità I_0 che attraversa un materiale di spessore x emerge con intensità $I = I_0 e^{-\mu x}$, essendo μ il coefficiente di assorbimento.

Sapendo che $I_0 = (10.00 \pm 0.02) \text{ W/m}^2$, $I = (5.50 \pm 0.01) \text{ W/m}^2$, $x = (0.0200 \pm 0.0004) \text{ m}$, calcolare il coefficiente di assorbimento μ con la sua incertezza.

$$\langle \mu \rangle = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{I_0}{I}\right) = \frac{1}{0.02 \text{ m}} \ln\left(\frac{10.00 \text{ W/m}^2}{5.50 \text{ W/m}^2}\right) = 29.8918 \text{ m}^{-1}$$

$$\Delta\mu = \sqrt{\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial I_0}\right)^2 (\Delta I_0)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial I}\right)^2 (\Delta I)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x^2}\right)^2 \left[\ln\left(\frac{I_0}{I}\right)\right]^2 + \frac{1}{x^2} \left(\frac{\Delta I_0}{I_0}\right)^2 + \frac{1}{x^2} \left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2} = 0.6129 \text{ m}^{-1}$$

$$\mu = \langle \mu \rangle \pm \Delta\mu = (29.9 \pm 0.6) \text{ m}^{-1}$$

Per le espressioni **monomie**, cioè del tipo

$$y = a \cdot x^\alpha \cdot w^\beta \cdot z^\gamma$$

(con a costante) vale la seguente relazione:

$$\left(\frac{\Delta y}{\langle y \rangle} \right)^2 = \left(\alpha \cdot \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \right)^2 + \left(\beta \cdot \frac{\Delta w}{\langle w \rangle} \right)^2 + \left(\gamma \cdot \frac{\Delta z}{\langle z \rangle} \right)^2$$

Esempio: si vuole misurare la costante dielettrica relativa ϵ_r di un materiale misurando la capacit  $C = (\epsilon_0 \epsilon_r S) / d$ di un condensatore piano ad armature circolari di raggio r poste a distanza d (essendo ϵ_0 la costante dielettrica del vuoto e S la superficie delle armature) tra cui   posto il materiale stesso.

Sapendo che l'incertezza di ϵ_0   trascurabile e che le incertezze relative di C , r , d valgono rispettivamente 0.05, 0.01, 0.03, calcolare l'incertezza relativa di ϵ_r :

$$\epsilon_r = \frac{C \cdot d}{\epsilon_0 \pi r^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \epsilon_r}{\epsilon_r} &= \sqrt{\left(\frac{\Delta C}{\langle C \rangle}\right)^2 + 2^2 \left(\frac{\Delta r}{\langle r \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta d}{\langle d \rangle}\right)^2} = \\ &= \sqrt{(0.05)^2 + 2^2 (0.01)^2 + (0.03)^2} = 0.06 \end{aligned}$$

Esempio: si vuole misurare la costante dielettrica relativa ϵ_r di un materiale misurando la capacit  $C = \epsilon_0 \epsilon_r S / d$ di un condensatore piano ad armature circolari di raggio r poste a distanza d (essendo ϵ_0 la costante dielettrica del vuoto e S la superficie delle armature) tra cui   posto il materiale stesso.

Sapendo che l'incertezza di ϵ_0   trascurabile e che le incertezze relative di r , d valgono rispettivamente 0.01,0.02, con che incertezza relativa occorre misurare C affin  l'incertezza relativa di ϵ_r sia dell'ordine di 0.03 ?

$$\left(\frac{\Delta \epsilon_r}{\epsilon_r} \right)^2 = \left(\frac{\Delta C}{\langle C \rangle} \right)^2 + 2^2 \left(\frac{\Delta r}{\langle r \rangle} \right)^2 + \left(\frac{\Delta d}{\langle d \rangle} \right)^2$$
$$\frac{\Delta C}{\langle C \rangle} = \sqrt{\left(\frac{\Delta \epsilon_r}{\epsilon_r} \right)^2 - 2^2 \left(\frac{\Delta r}{\langle r \rangle} \right)^2 - \left(\frac{\Delta d}{\langle d \rangle} \right)^2} =$$
$$= \sqrt{(0.03)^2 - 2^2 (0.01)^2 - (0.02)^2} = 0.01$$

Se uno dei fattori dell'espressione monomia è a sua volta una funzione

$$y = a \cdot x^\alpha \cdot w^\beta \cdot z^\gamma \cdot [f(w)]^\rho$$

vale la seguente relazione:

$$\left(\frac{\Delta y}{\langle y \rangle} \right)^2 = \left(\alpha \cdot \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \right)^2 + \left(\beta \cdot \frac{\Delta w}{\langle w \rangle} \right)^2 + \left(\gamma \cdot \frac{\Delta z}{\langle z \rangle} \right)^2 + \left(\rho \cdot \frac{\Delta f(w)}{f(\langle w \rangle)} \right)^2$$

Esempio: si vuole determinare la velocità v di un proiettile misurando la gittata s e sapendo che, trascurando l'attrito dell'aria, $s = (v^2/g)\sin(2\alpha)$. g è l'accelerazione di gravità e α l'alzo del cannone.

Sapendo che $\alpha = (0.52 \pm 0.01)$ rad, l'incertezza relativa di s vale 0.01 e che l'incertezza relativa di g vale 0.01, determinare l'incertezza relativa di v .

$$v = \sqrt{\frac{s \cdot g}{\sin(2\alpha)}} \quad \Delta(\sin(2\alpha)) = 2\cos(2\alpha)\Delta\alpha$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta v}{v} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{\Delta s}{\langle s \rangle}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{\Delta g}{\langle g \rangle}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \frac{2\cos(2\langle \alpha \rangle)\Delta\alpha}{\sin(2\langle \alpha \rangle)}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} 0.01\right)^2 + \left(\frac{1}{2} 0.01\right)^2 + (0.0059)^2} = 0.009 \end{aligned}$$

Tipi di incertezza sperimentale

Le incertezze sperimentali si possono essenzialmente distinguere in:

incertezze di tipo A)

valutate con metodi statistici

incertezze di tipo B)

valutate con altri metodi

(oppure anche “accidentali” o “sistematiche”)

Incertezze di tipo A (errori statistici, o casuali)

Essi sono dovuti a cause di varia natura che agiscono in modo del tutto casuale (aleatorio), ora in un senso ora nell'altro.

Esempi di sorgenti di errore: condizioni ambientali variabili (temperatura, tensione della rete elettrica, ecc.), disturbi meccanici (vibrazioni prodotte dal traffico cittadino), cattiva stima nella lettura strumentale, ecc.

Tali incertezze sperimentali possono essere rivelate ripetendo le misure e possono essere valutate statisticamente.

Incertezze di tipo B (errori sistematici)

Essi sono dovuti a difetti del metodo o delle apparecchiature sperimentali utilizzate.

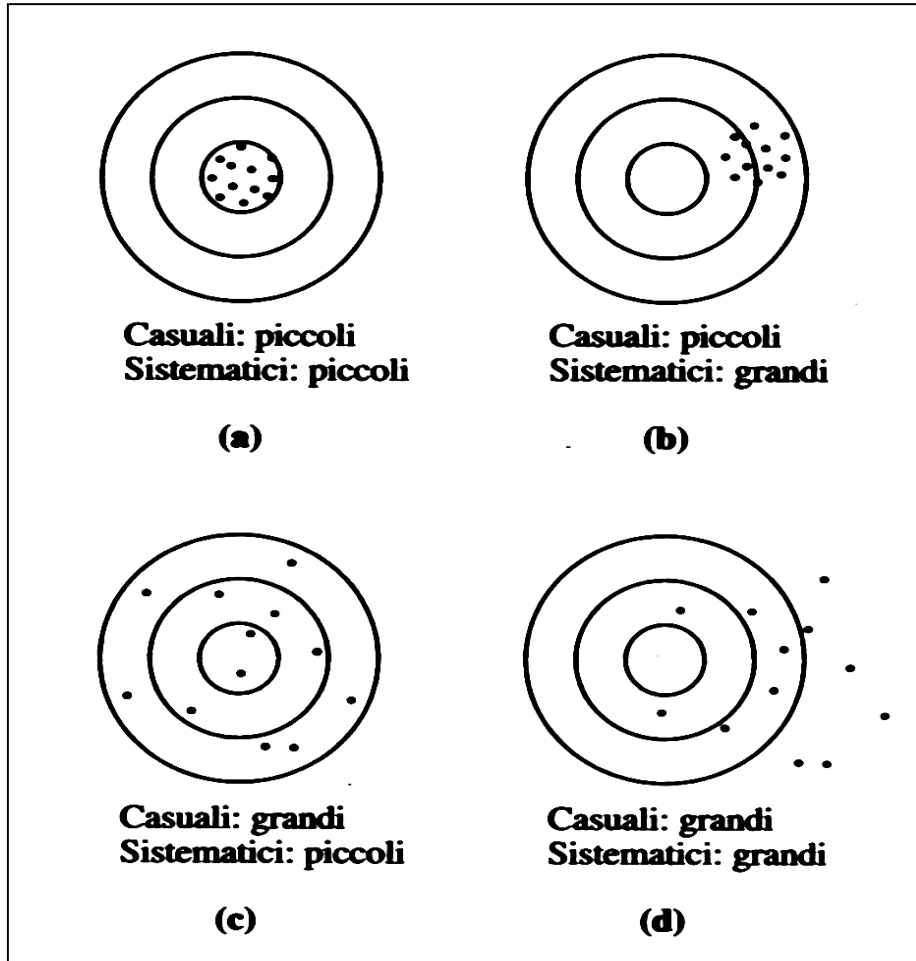
Esempio: nella misura di un intervallo temporale con il cronometro, il fatto che il cronometro marci più lentamente o più rapidamente di quanto dovrebbe è sorgente di errore sistematico

Tali errori possono essere ridotti mediante una accurata analisi della tecnica di misura e adottando opportuni accorgimenti (ad esempio confrontare gli strumenti con gli standard accettati,)

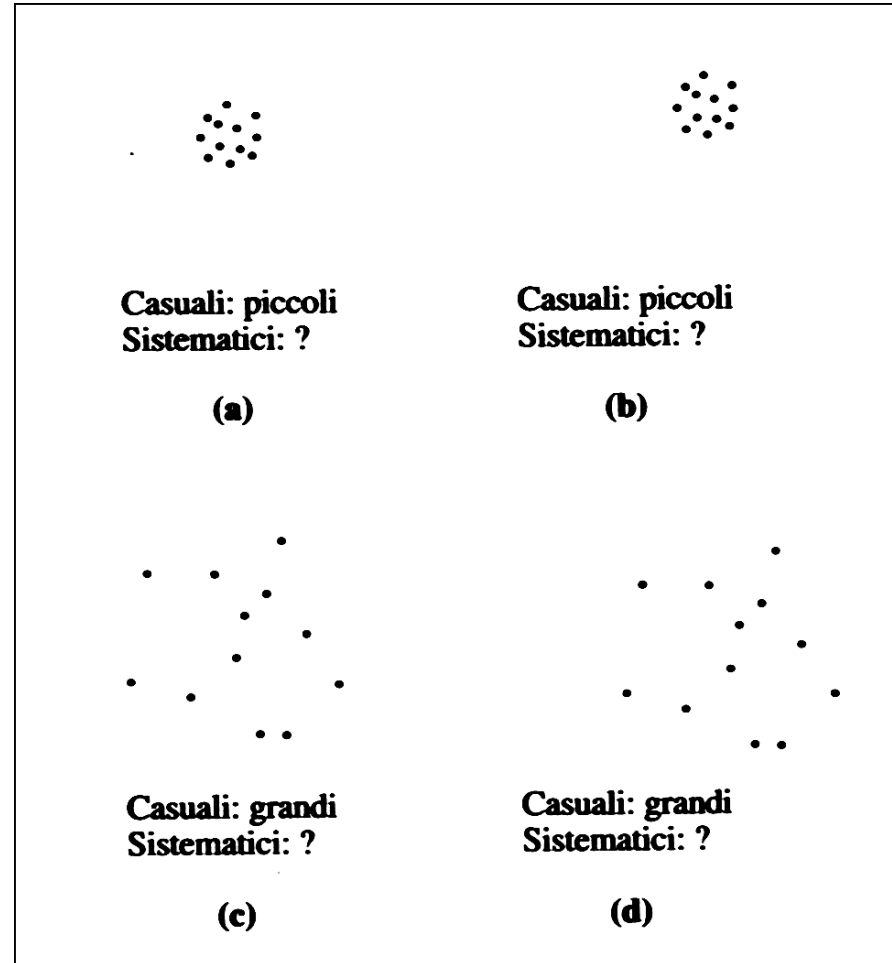
Errori strumentali

I risultati di diverse misurazioni possono, a volte, risultare tutti uguali tra loro. Se ciò si verifica, la circostanza è da attribuirsi al fatto che lo strumento utilizzato è talmente poco sensibile che le fluttuazioni casuali della misura non possono essere apprezzate. In questo caso si valuta come errore massimo la più fine divisione della scala (l'ultima cifra di lettura negli strumenti digitali).

**TIRO AL BERSAGLIO: Incertezze
di tipo A (casuali o accidentali)
e di tipo B (sistematiche)**



**SENZA BERSAGLIO:
situazione più vicina a
quella di un esperimento**



DEFINIZIONI

Probabilità

- Un numero reale compreso tra 0 e 1, associato a un evento casuale.
- Esso può essere correlato con la “frequenza relativa” o col “grado di credibilità” con cui un evento avviene.
- Per un alto grado di credibilità la probabilità è vicina al valore 1.
- Da un punto di vista non completamente corretto la probabilità può essere considerata come il rapporto tra il numero di eventi favorevoli e il numero degli eventi possibili nelle medesime condizioni.

Variabile aleatoria

- Una variabile aleatoria è una variabile che può assumere qualsiasi valore in un determinato intervallo, e alla quale è associata una distribuzione di probabilità (o densità di probabilità).
- Una variabile aleatoria che può assumere solo valori isolati è detta **variabile discreta**. Una variabile aleatoria che può assumere tutti i valori entro un intervallo finito o infinito è detta **variabile continua**.

Distribuzione di probabilità (di una variabile aleatoria)

- Una funzione che definisce la probabilità che una variabile aleatoria discreta assuma un determinato valore (o che una variabile aleatoria continua assuma tutti i valori di un intervallo).
- La probabilità che una variabile aleatoria possa assumere un qualsiasi valore tra quelli permessi è 1.

Densità di probabilità

- per una variabile discreta: una funzione che fornisce, per ogni valore x_i di una variabile aleatoria discreta X , la probabilità p_i che la variabile aleatoria si uguale a x_i . $p_i = \Pr(X = x_i)$
- per una variabile continua: una funzione $p(x)$ che fornisce, per ogni intervallo $(x \leftrightarrow x+dx)$ dei valori che può assumere una variabile aleatoria continua X , la probabilità dP che la variabile aleatoria assuma un valore all'interno dell'intervallo. $dP = p(x) dx = \Pr(x \leq X \leq x+dx)$
- La densità di probabilità coincide con la derivata (quando esiste) della funzione di distribuzione $p(x) = dP(x)/dx$

Normalizzazione della densità di probabilità

- Per il fatto che la probabilità che una variabile aleatoria possa assumere un qualsiasi valore tra quelli permessi vale 1, la densità di probabilità deve soddisfare a condizioni di normalizzazione:
- per una variabile discreta: Se i valori possibili sono (x_1, x_2, \dots, x_N)

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1 \quad p_i \geq 0$$

- per una variabile continua: Se i valori possibili sono compresi nell'intervallo $(a \leftrightarrow b)$

$$\int_a^b p(x) dx = 1 \quad p(x) \geq 0 \quad a \leq x \leq b$$

Media o Valore Atteso

Per una variabile discreta: siano x_i i valori assunti dalla variabile aleatoria X con probabilità p_i . Il valore atteso, se esiste, risulta:

$$\mu = E(X) = \sum_i p_i x_i$$

la somma essendo estesa a tutti i valori x_i che può assumere la variabile X .

Per una variabile continua: sia $p(x)$ la densità di probabilità associata alla variabile aleatoria X . Il valore atteso, se esiste, risulta:

$$\mu = E(X) = \int x p(x) dx$$

l'integrale essendo esteso a tutti gli intervalli che comprendono i possibili valori assunti da X .

Variabile aleatoria centrata

Una variabile aleatoria il cui valore atteso sia nullo. Se la variabile aleatoria X ha un valore atteso uguale a μ , la corrispondente variabile aleatoria centrata è $(X - \mu)$.

Varianza

La varianza di una variabile aleatoria, o di una distribuzione di probabilità, è il valore atteso del quadrato della corrispondente variabile centrata

$$\sigma^2 = V(X) = E\{[X - E(X)]^2\} = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Deviazione standard

La deviazione standard di una variabile aleatoria, o di una distribuzione di probabilità, è la radice quadrata positiva della varianza

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{E\{[X - E(X)]^2\}} = \sqrt{E(X^2) - [E(X)]^2}$$

Stima statistica del valor medio (o valore atteso)

Il valore atteso della variabile aleatoria z , rappresentato col simbolo μ_z e detto anche valor medio di z , è dato da

$$\mu_z \equiv E(z) = \int z p(z) dz$$

La sua **stima statistica** è data dalla media aritmetica dei valori z_i assunti dalla variabile z di densità di probabilità $p(z)$.

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$$

Stima statistica della varianza

La varianza di una variabile aleatoria z , di densità di probabilità $p(z)$, è data da:

$$\sigma^2(z) = \int (z - \mu_z)^2 p(z) dz$$

essendo μ_z il valore atteso di z .

La varianza $\sigma^2(z)$ può essere stimata da

$$s^2(z) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2 \quad \bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$$

Il fattore $(n-1)$ nella espressione di $s^2(z)$ proviene dalla correlazione tra i valori z_i e \bar{z} e riflette il fatto che vi sono solo $(n-1)$ termini indipendenti nel set di valori $\{z_i - \bar{z}\}$.

Se il valore atteso μ_z della variabile z è noto (non stimato) la varianza può essere stimata da

$$s^2(z_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu_z)^2$$

La varianza della media aritmetica delle osservazioni, piuttosto che la varianza di una singola osservazione, è la misura appropriata dell'incertezza del risultato di una misurazione.

La varianza della variabile z , $\sigma^2(z)$, deve essere accuratamente distinta dalla varianza della media aritmetica .

La varianza della media aritmetica di una serie di n osservazioni indipendenti z_i della grandezza rappresentata dalla variabile aleatoria z è data da

$$\sigma^2(\bar{z}) = \sigma^2(z) / n$$

ed è stimata dalla varianza sperimentale della media:

$$s^2(\bar{z}) = \frac{s^2(z)}{n} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2$$

Deviazione standard

La deviazione standard è la radice quadrata positiva della varianza.

Quindi, in un esperimento:

la miglior stima della grandezza x è la **media aritmetica**

$$x_{best} = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{\sum x_i}{N}$$

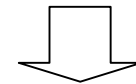
la deviazione standard delle misure x_1, \dots, x_N è una stima della "incertezza media":

i	x_i	$d_i = x_i - \bar{x}$	d_i^2
1	71	-0.8	0.64
2	72	0.2	0.04
3	72	0.2	0.04
4	73	1.2	1.44
5	71	-0.8	0.64

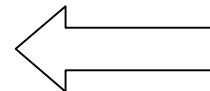
media dei quadrati delle deviazioni: **varianza**

estraendo la radice quadrata: **deviazione standard**

$$\bar{x} = 71.8 \quad \sum d_i = 0 \quad \sum d_i^2 = 2.80$$



$$s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum (x_i - \bar{x})^2}$$



$$N \longrightarrow N-1$$

La deviazione standard s_x caratterizza l'incertezza media delle singole misure x_1, \dots, x_N da cui è stata calcolata.

Tuttavia $x_{best} = \bar{x}$ rappresenta una combinazione opportuna di tutte le N misure \Rightarrow l'incertezza di \bar{x} è minore dell'incertezza delle singole misure ed è determinata dalla **deviazione standard della media:**

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

N.B.: la giustificazione teorica di questi concetti statistici verrà data quando sarà discussa la curva di distribuzione normale

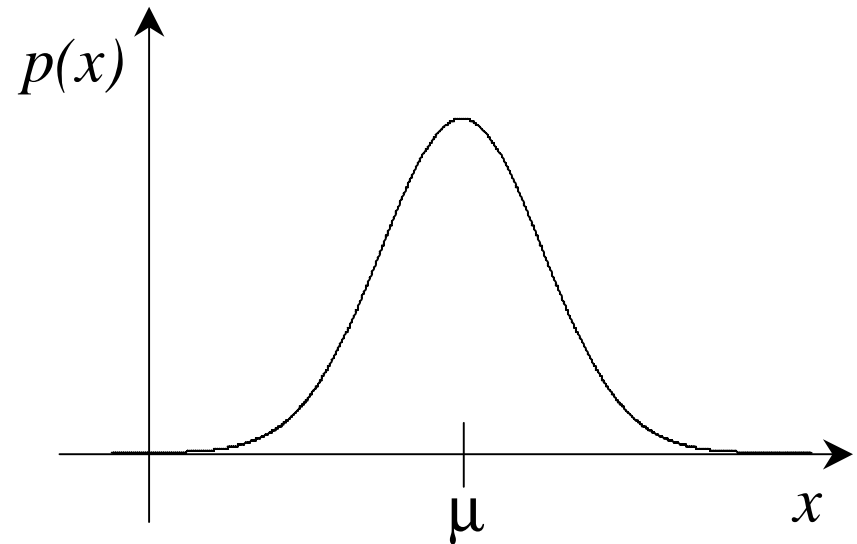
Distribuzione normale (o gaussiana)

La distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria X la cui densità di probabilità è

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty \leq x \leq \infty$$

è detta distribuzione normale o gaussiana.

μ è il valore atteso della variabile aleatoria X e σ^2 è la relativa varianza.



La distribuzione normale rappresenta, per determinati valori di σ e di μ che variano di caso in caso, la distribuzione delle misure per una estesa classe di grandezze fisiche.

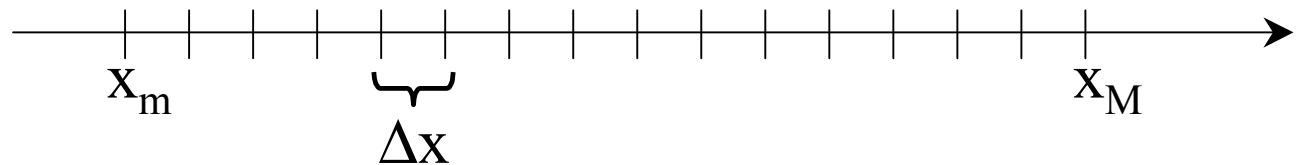
Esempio: costruzione di un istogramma

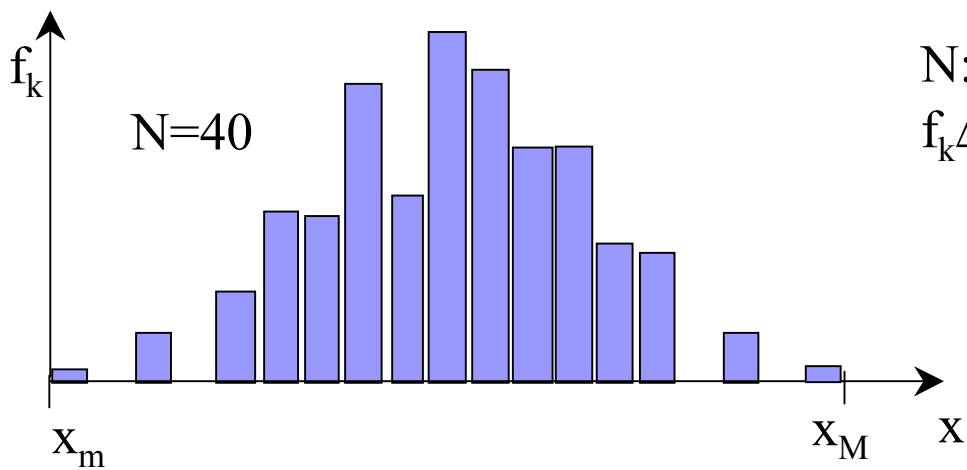
Supponiamo di effettuare per N volte la misurazione della stessa grandezza nelle stesse condizioni: in generale, i risultati ottenuti non saranno tutti uguali tra loro per via degli errori casuali.

Consideriamo i valori minimi e massimi misurati (x_m e x_M) e dividiamo l'intervallo compreso tra essi in r parti uguali di ampiezza

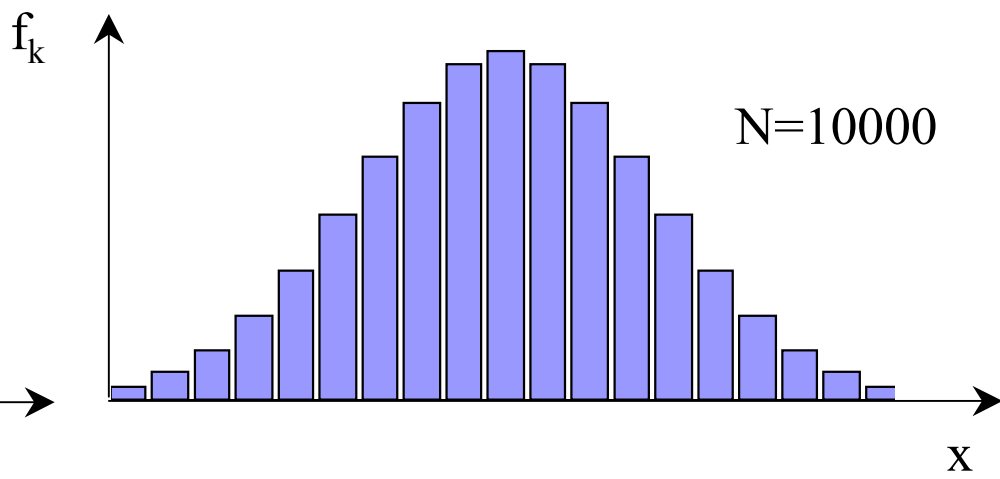
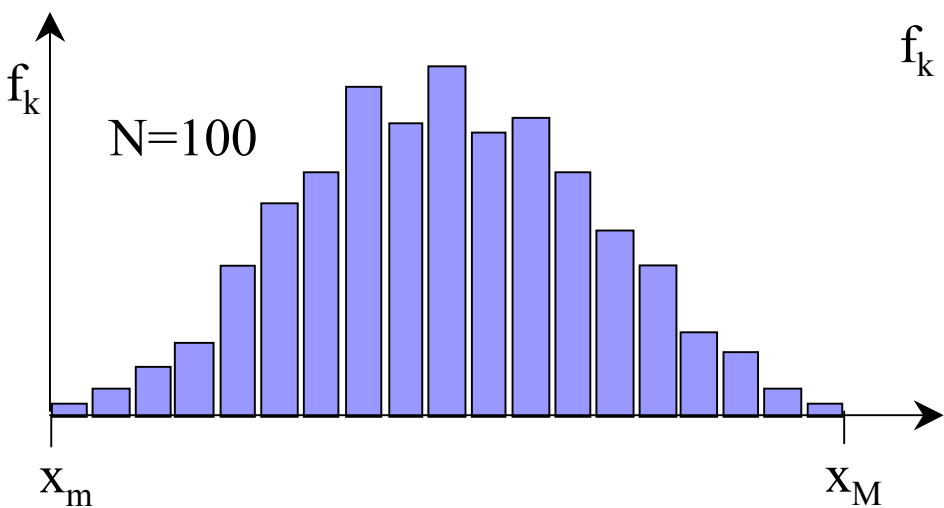
$$\Delta x = \frac{x_M - x_m}{r}$$

Consideriamo un sistema di assi cartesiani e riportiamo sulle ascisse i valori delle misure ottenute e in ordinata il numero di risultati della misura che cadono nel sotto-intervallo

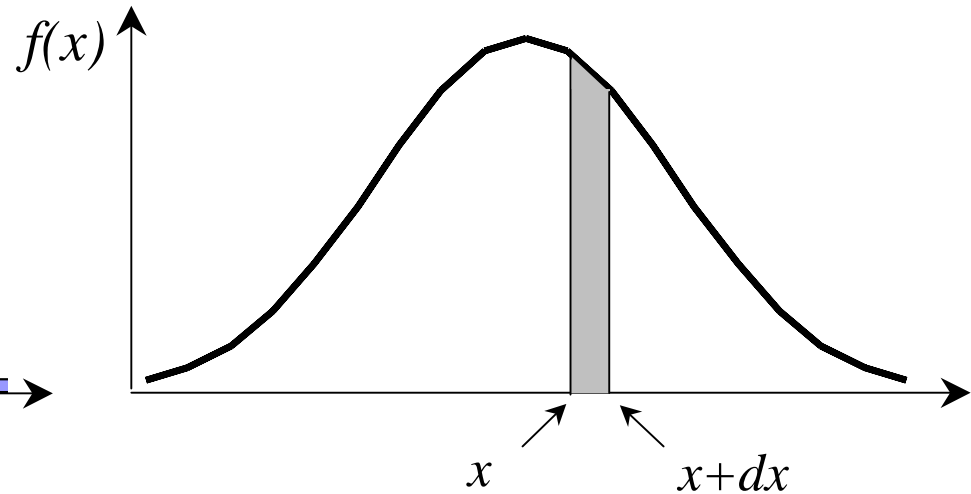
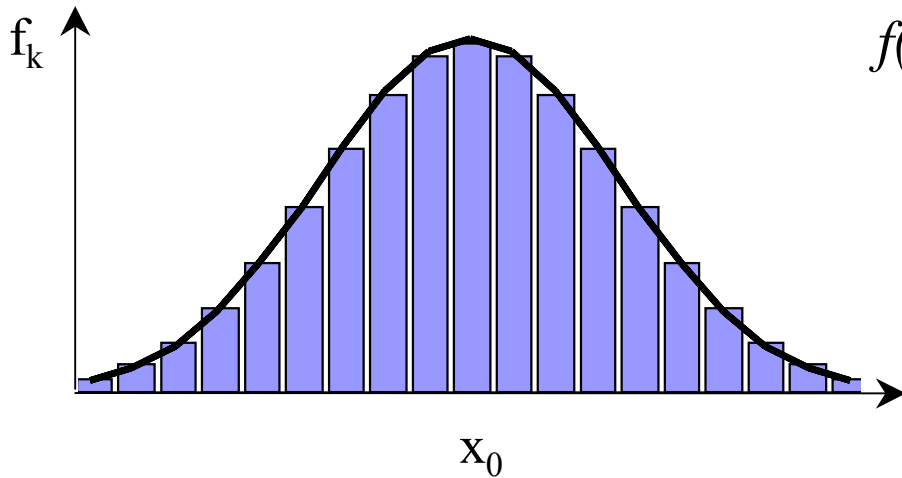




N : numero totale di misure
 $f_k \Delta x_k$: frazione di misure nell'intervallo k -esimo (area rettangolo)



distribuzione limite: distribuzione dei risultati che si dovrebbe ottenere se il numero delle misure diventasse infinitamente grande



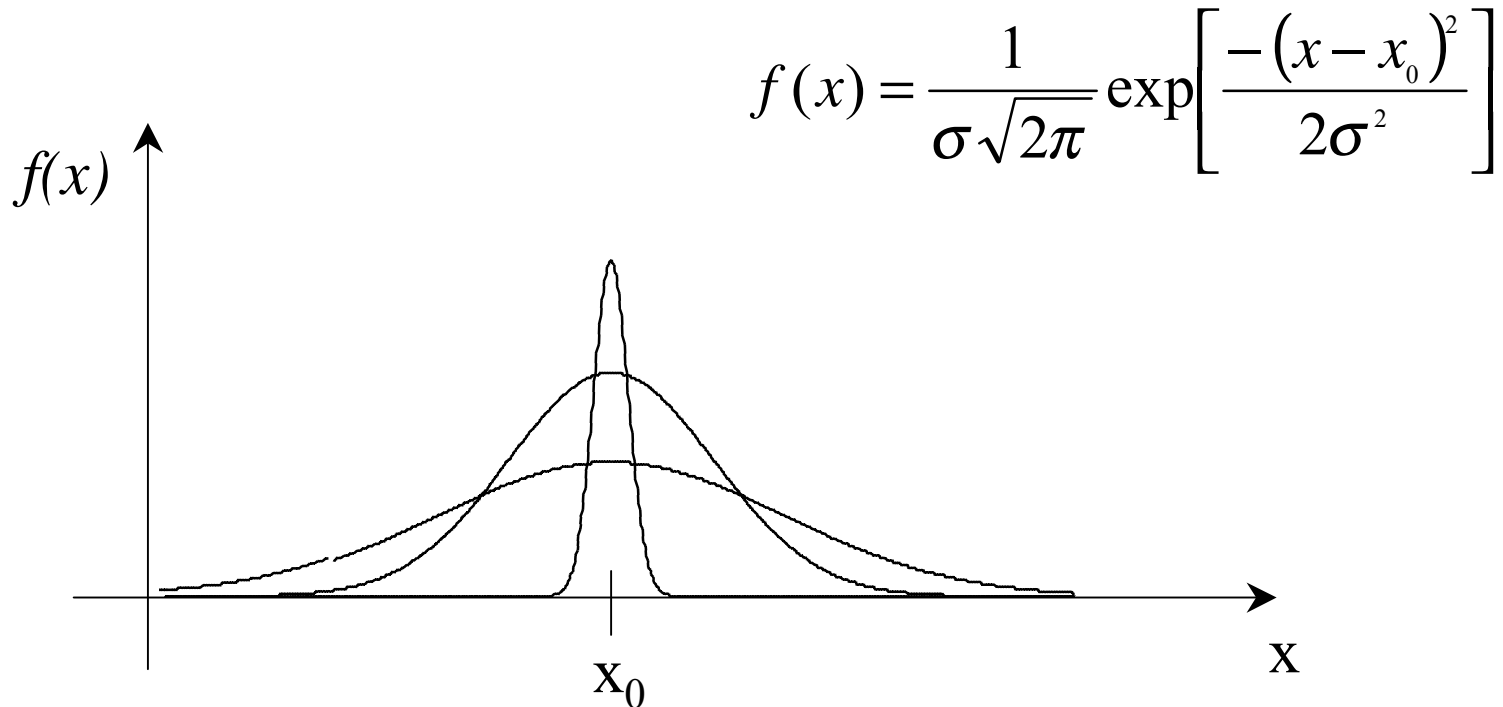
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

$f(x)dx = \text{probabilità che una misura dia un risultato compreso tra } x \text{ e } dx$

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx$$

Si può dimostrare che SE una misura è soggetta a molte piccole sorgenti di errori casuali e trascurabili errori sistematici, allora i valori misurati saranno distribuiti secondo una distribuzione normale (o di Gauss), centrata sul “valore vero”.



Distribuzioni normali per diversi valori di σ

La conoscenza della distribuzione limite per una misura ci consente di calcolare il valore medio atteso dopo un gran numero di prove. La media attesa per la distribuzione di Gauss è

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx \quad \text{con} \quad p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} (y+x_0) \exp\left[-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right] dy \quad \text{con } y = x-x_0$$

$$\bar{x} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left\{ \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y \exp\left[-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right] dy}_{=0} + x_0 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right] dy}_{=\sigma\sqrt{2\pi}} \right\}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = x_0$$

Quindi, se le misure sono distribuite secondo la distribuzione normale, dopo molte prove il valore medio \bar{x} coincide con il valore x_0 per cui la gaussiana assume il suo valore massimo, che abbiamo assunto essere il ‘valore vero’

Giustificazione della media come miglior stima

Avendo misurato N valori x_1, x_2, \dots, x_N il problema è di determinare la miglior stima del 'valore vero' X e di σ .

Probabilità di ottenere una lettura in un intervallo dx_i attorno a x_i

$$P[x \in (x_i \div x_i + dx_i)] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - x_0)^2}{2\sigma^2}} dx_i$$

semplificando: $P(x_i) \propto \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(x_i - x_0)^2}{2\sigma^2}}$

La probabilità di osservare l'intero set di letture è il prodotto delle probabilità singole (eventi indipendenti):

$$P_{x_0, \sigma}(x_1, x_2, \dots, x_N) = P(x_1)P(x_2) \dots P(x_N) \propto \frac{1}{\sigma^N} e^{-\frac{\sum_i (x_i - x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

Principio di massima verosimiglianza: date le N misure osservate, le migliori stime di x_0 e σ sono quei valori per i quali gli osservati sono più probabili (cioè per cui $P_{x_0,\sigma}$ è massima)

$$\Rightarrow t = \frac{\sum_i (x_i - x_0)^2}{\sigma^2} \quad \text{minima} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial t}{\partial x_0} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{miglior stima per } x_0: \quad x_0 = \frac{\sum_i x_i}{N}$$

Quindi la migliore stima del ‘valore vero’ X (che abbiamo assunto coincidere con l’ascissa del picco x_0 della gaussiana) è la media aritmetica $\sum_i x_i/N$ delle misure.

Analogamente si dimostra che la miglior stima per la larghezza della distribuzione σ è la deviazione standard s_x degli N valori osservati:

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Deviazione standard della media

- Poiché ciascuna delle grandezze misurate

x_1, \dots, x_N è distribuita normalmente, lo è anche $\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_N}{N}$

- Poiché per ciascun valore x_1, \dots, x_N il ‘valore vero’ è X , lo è anche per \bar{x}

⇒ dopo aver fatto molte determinazioni della media \bar{x} di N misure, i risultati per \bar{x} saranno distribuiti attorno al valore vero X .

La stima della larghezza della distribuzione dei risultati \bar{x} si ricava mediante la propagazione delle incertezze:

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_1} s_{x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_N} s_{x_N}\right)^2}$$

x_1, \dots, x_N sono tutte misure della stessa grandezza $x \Rightarrow s_{x1} = \dots = s_{xN} = s_x$

Inoltre $\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_N} = \frac{1}{N}$ quindi:

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\left(\frac{1}{N} s_x\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{N} s_x\right)^2} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

Al solito $s_{\bar{x}}$ rappresenta il limite di confidenza del 68%: se ricaviamo la media di N misure una sola volta, possiamo essere confidenti al 68% che il nostro risultato giace entro una distanza $s_{\bar{x}}$ dal 'valore vero' X.

Riassumendo:

se le misure di x sono soggette solo ad errori casuali, allora la loro distribuzione limite è la funzione di Gauss centrata sul 'valore vero' X e con larghezza σ .

La larghezza σ è il limite di confidenza del 68%

Basandosi sugli N valori misurati x_1, \dots, x_N si mostra che la miglior stima del 'valore vero' X è la media $\bar{x} = \sum_i x_i / N$ e la miglior stima di σ è la deviazione standard s_x

L'incertezza in \bar{x} (\bar{x} è considerata la stima del valore vero X) è la deviazione standard della media $\sigma_{\bar{x}}$ stimata come $s_{\bar{x}} = s_x / \sqrt{N}$

Si dimostra che l'incertezza relativa di s_x (considerata la stima della 'larghezza vera' σ) è $1 / \sqrt{2(N-1)}$ (\Rightarrow è necessario fare sufficienti misure prima di poter conoscere realisticamente l'incertezza!)

LIVELLI DI CONFIDENZA

Il problema è di ottenere, dalla stima y della grandezza Y misurata e dalla sua incertezza $u(y)$, una **incertezza espansa** $U_p = k_p \cdot u(y)$ che definisca un intervallo $y - U \leq Y \leq y + U$ tale che abbia una elevata probabilità di copertura (o un elevato **livello di confidenza**) p .

Si deve quindi determinare il fattore di copertura k_p che genera un intervallo intorno al risultato y della misurazione che ci si aspetta contenga una grande, specifica frazione p della distribuzione di valori che potrebbero ragionevolmente essere attribuiti alla grandezza Y da misurare.

Per ottenere il fattore di copertura k_p che produce un intervallo corrispondente a uno specifico livello di confidenza p si richiede una dettagliata conoscenza della distribuzione di probabilità che caratterizza i risultati della misura.

Ad esempio, per una grandezza x descritta dalla **distribuzione normale** di valor medio $\langle x \rangle$ e deviazione standard $\sigma_{\langle x \rangle}$, il valore di k_p che produce un intervallo $\langle x \rangle \pm k_p \sigma_{\langle x \rangle}$ che comprende una frazione p della distribuzione, può essere calcolato facilmente.

Infatti la probabilità che $|x - \langle x \rangle| \leq k \cdot \sigma_{\langle x \rangle}$

è data da
$$\int_{x_0 - k\sigma_{\langle x \rangle}}^{x_0 + k\sigma_{\langle x \rangle}} f(x) dx$$

dove
$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Ad esempio: *Livello di confidenza p (in %)*

Fattore di copertura k_p

68.27

1

90

1.645

95

1.960

95.45

2

99

2.576

99.73

3

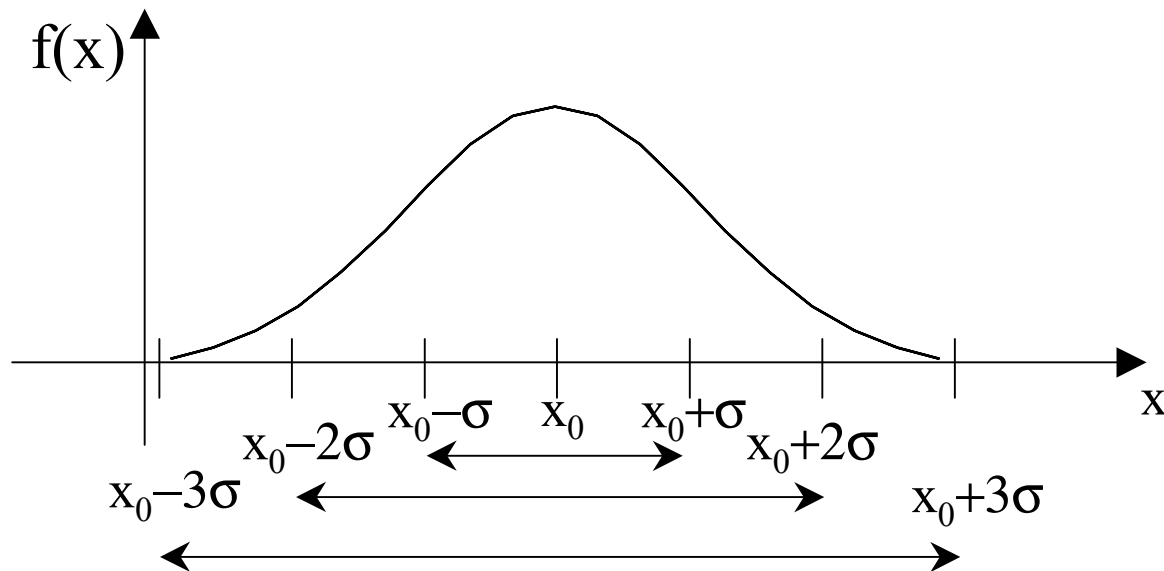
100

∞

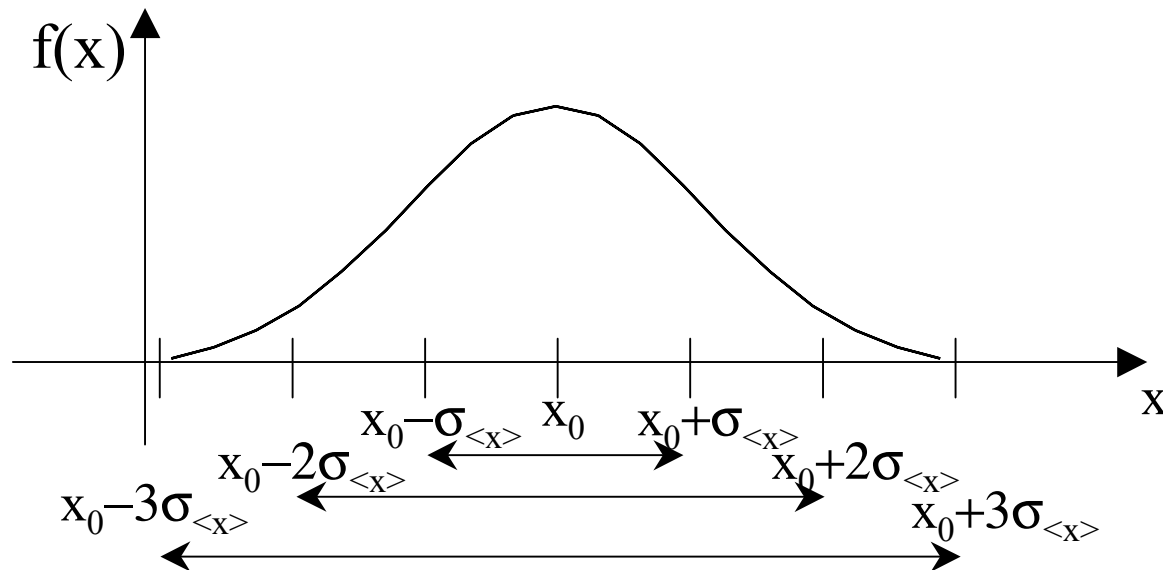
Quindi, se i risultati si distribuiscono secondo una gaussiana, vi è il 68.27% di probabilità che il risultato di **una misura** differisca meno di σ dal valore vero

il 95.4 % di probabilità che la misura cada entro 2σ dal valore vero

il 99.7 % di probabilità che la misura cada entro 3σ dal valore vero



Analogamente, con il 68.27 % di probabilità, il **valore medio** $\langle x \rangle$ si discosta da quello vero per meno di $\sigma_{\langle x \rangle}$
con il 95.4 % $\langle x \rangle$ si discosta per meno di $2\sigma_{\langle x \rangle}$
con il 99.7 % $\langle x \rangle$ si discosta per meno di $3\sigma_{\langle x \rangle}$.



In conclusione, il risultato di una misurazione si potrà indicare come

$$x = \langle x \rangle \pm s_{\langle x \rangle}$$

dove

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad s_{\langle x \rangle} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}$$

N.B.: Nel caso in cui l'incertezza calcolata come sopra sia inferiore all'errore strumentale, si usa quest'ultimo come errore massimo.

Metodo dei minimi quadrati

Uno dei più interessanti tipi di esperimento riguarda la misura di parecchi valori di **due** diverse variabili fisiche, per investigare la relazione matematica tra le due variabili.

Es. lasciamo cadere un corpo da una certa altezza. Tale corpo sarà soggetto all'accelerazione di gravità g . Nel caso in cui per il tempo $t=0$ esso abbia una velocità iniziale $v=v_0$, la sua velocità v dovrebbe essere una funzione lineare del tempo t ,

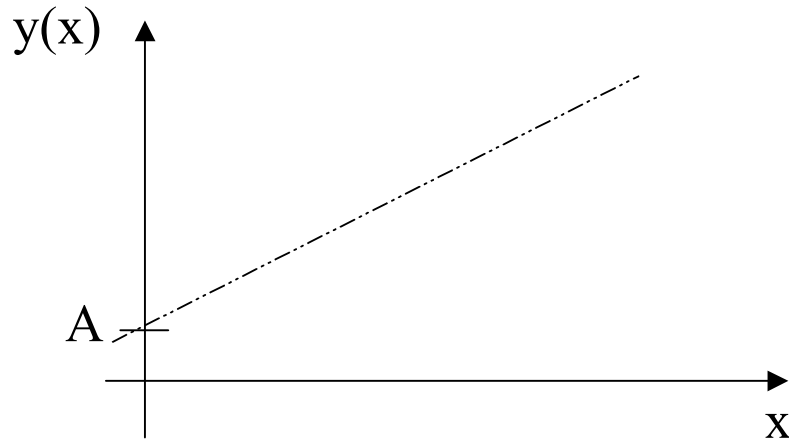
$$v(t) = v_0 + gt$$

tale relazione è **lineare** del tipo

$$y(x) = A + Bx$$

dove A e B sono costanti.

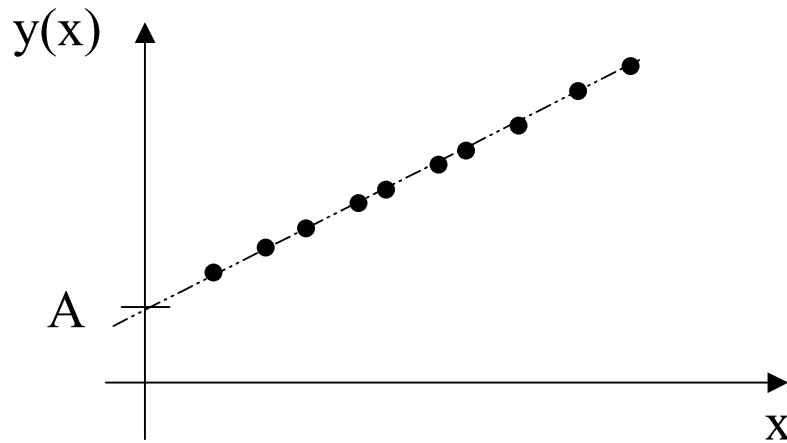
Se le due variabili sono in relazione come $y(x) = A + Bx$, allora un grafico di y in funzione di x dovrebbe essere una linea retta che ha pendenza (coefficiente angolare) B e interseca l'asse y in $y=A$.



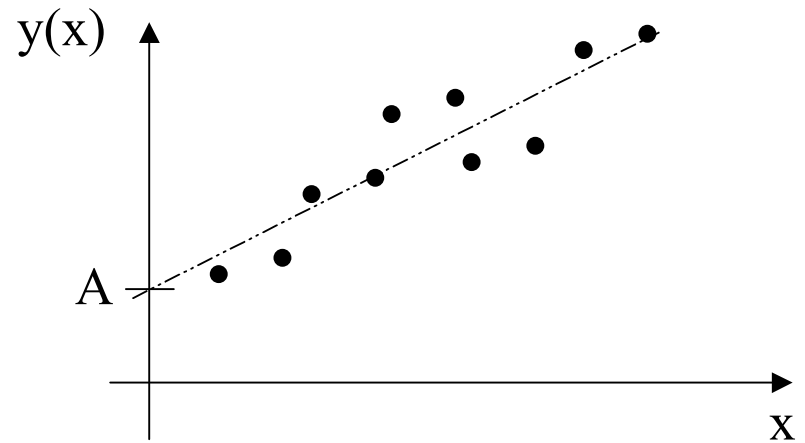
N.B. I punti y_1, y_2, \dots, y_n
non sono N misure della
stessa grandezza

Se si misurassero N diversi valori di x_1, x_2, \dots, x_n e i valori corrispondenti y_1, y_2, \dots, y_n e se le misure non fossero soggette ad incertezze, allora ciascuno dei punti (x_i, y_i) dovrebbero giacere esattamente sulla retta

In realtà, essendo presenti delle ‘incertezze’, i punti potranno risultare ‘sparpagliati’ intorno alla retta.



Caso ideale



Caso reale

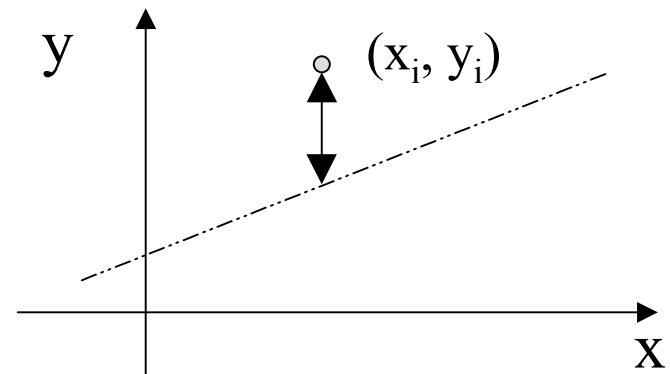
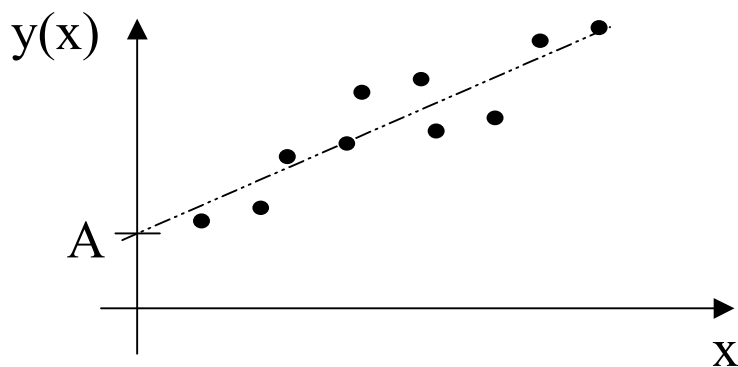
Se prendiamo ‘per garantito’ che y e x soddisfano una relazione lineare, ci si può porre il problema di trovare la miglior retta per interpolare un insieme di punti misurati $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, cioè trovare un **fit lineare (regressione lineare o curva dei minimi quadrati per una retta)**. Si dovranno trovare quindi le migliori stime dei coefficienti della retta A e B .

Il procedimento è il seguente

si eseguono n misure corrispondenti alle coppie $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. Sapendo che la relazione è lineare si calcolano gli scarti $v_i = y_i - (A + Bx_i)$, si calcolano i quadrati e si sommano

$$\Phi = \sum_{i=1}^n (y_i - A - Bx_i)^2$$

Si cercano i valori di A e B per cui Φ sia la minima possibile. Questo equivale a rendere minimi i quadrati delle distanze dei punti (x_i, y_i) dalla retta, misurate nella direzione dell'asse y



Per far questo differenziamo Φ rispetto ad A e B e poniamo le derivate uguali a zero:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial A} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - A - Bx_i) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial B} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - A - Bx_i) = 0 \end{cases}$$

Queste due equazioni possono essere riscritte come equazioni simultanee per A e B :

$$\begin{cases} A \cdot n + B \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ A \cdot \sum_{i=1}^n x_i + B \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases} \quad \leftarrow \text{‘equazioni normali’}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \cdot n + B \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ A \cdot \sum_{i=1}^n x_i + B \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{array} \right.$$

$$A = \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)}{n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

$$B = \frac{n \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)}{n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

Migliori stime per le
costanti A e B

Migliori stime per le incertezze di A e B (σ_A , σ_B)

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - A - Bx_i)^2 \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

$$\sigma_B^2 = \frac{n}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - A - Bx_i)^2 \frac{1}{n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

Nel caso in cui la presumibile relazione tra x ed y non è lineare, in generale

$$y = f(x)$$

ciò che si fa è sempre minimizzare la somma degli scarti quadratici

$$\Phi = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2$$

ricavandosi un sistema di n equazioni in cui compaiono gli n parametri della funzione $f(x)$