2

L'energia dissipata per effetto Joule si ottiene integrando la potenza

$$W = \int_{t_0}^{t_1} Ri^2 \mathrm{d}t \,.$$

Per ricavare la corrente si scrive l'equazione del circuito:

$$-\frac{q}{C} - Ri = 0 \,,$$

che, derivata, dà

$$\frac{i}{C} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0 \,.$$

Separando le variabili si ha

$$\frac{\mathrm{d}i}{i} = -\frac{1}{RC}\mathrm{d}t$$

che ha per soluzione $i = i_0 e^{-\frac{t}{RC}}$, con $i_0 = \frac{q_0}{RC}$.
Possiamo ora scrivere l'energia:

$$W = -\int_{t_0}^{t_1} R\frac{q_0^2}{R^2C^2} e^{-\frac{2t}{RC}} \mathrm{d}t = -\frac{q_o^2}{RC^2}\left(-\frac{RC}{2}\right)\left[e^{-\frac{2t}{RC}}\right]_{t_0}^{t_1} = \frac{q_0^2}{2C}\left[e^{-\frac{2t_1}{RC}} - 1\right]$$

e quindi si può ricavare il valore della carica iniziale

$$q_0 = \sqrt{\frac{-2CW}{1 - e^{-\frac{2t_1}{RC}}}} \,.$$

Numericamente,

$$q_0 = \sqrt{\frac{-2 \cdot 10^{-5} \cdot (-10^{-1})}{1 - e^{-2}}} = 1{,}52 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{C} \,.$$

1

Per calcolare R si deve trovare l'espressione del potenziale in funzione della distanza r dal centro della sfera, a partire dalla definizione:

$$V_r = -\int_{\infty}^{r} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \,.$$

A seconda che r sia maggiore o minore del raggio R della sfera, bisogna considerare la diversa espressione del campo E:

Per $r > R$, $\quad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Per $r \leq R$, per la legge di Gauss, $4\pi r^2 E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$.

Tenendo presente la definizione di potenziale in un punto e il fatto che il campo elettrostatico è diverso se valutato all'interno o all'esterno della sfera, si ha:

$$V = -\int_{\infty}^{R/2} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\int_{\infty}^{R} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r - \int_{R}^{R/2} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\mathrm{d}r =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{1}{2}\left[\frac{R^2}{4} - R^2\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{\rho R^2}{8\varepsilon_0} \,.$$

Poiché la sfera è uniformemente carica, $\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$, quindi

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{R^2}{8\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{3q}{32\pi\varepsilon_0 R} =$$

$$= \frac{q}{\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{32}\right) = \frac{11}{32}\frac{q}{\pi\varepsilon_0 R} \,.$$

Da cui risulta $R = \frac{11}{32}\frac{q}{\pi\varepsilon_0 V}$ e numericamente,

$$R = \frac{11 \cdot 10^{-9}}{32\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^3} = 1{,}24 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m} \,.$$

(4)

Le dimensioni longitudinali della bobina sono molto minori di quelle del solenoide e quindi è molto difficile calcolare il campo magnetico generato dalla bobina.
Possiamo invece ricavare il coefficiente di mutua induzione M tenendo presente che $M_{12} = M_{21} = M$ e considerando una corrente i' che circoli nel solenoide e induca una forza elettromotrice nella bobina.
Esprimendo il flusso del campo $\mathbf{B}$, generato da una corrente i' che circoli nel solenoide, in funzione di M, si ha

$$\Phi(\mathbf{B}) = Mi' .$$

Esplicitando il modulo del campo B e il flusso di $\mathbf{B}$ attraverso le N_2 spire della bobina, si ha:

$$\mu_0 i' \frac{N_1}{\ell} N_2 S = Mi' .$$

Si può quindi ricavare il coefficiente M:

$$M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell} S \quad \text{con} \quad S = \pi r^2 .$$

Come superficie si deve considerare la sezione del solenoide e non quella della bobina, in quanto il campo B è nullo all'esterno del solenoide.

Calcolato il coefficiente di mutua induzione possiamo ora scrivere la forza elettromotrice indotta nel solenoide, in funzione di M e della variazione della corrente nella bobina:

$$\mathcal{E} = -M \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell} S \frac{\Delta i}{\Delta t}$$

e numericamente,

$$\mathcal{E} = -4\pi \cdot 10^{-7} \frac{10^4 \cdot 10^2}{1} \cdot \pi (5 \cdot 10^{-3})^2 (-1) = 9{,}87 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{V} = 98{,}7\ \mu\mathrm{V} .$$

(3)

1. Il campo magnetico all'interno del solenoide, considerato di lunghezza infinita, vale

$$B = \mu_r \mu_0 i n$$

e numericamente,

$$B = 100 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 10^3 = 0{,}126\ \mathrm{T} .$$

2. Il vettore magnetizzazione si ricava tenendo presente la relazione fra campo $\mathbf{B}$ e campo $\mathbf{H}$ nella materia e la definizione di vettore $\mathbf{H}$:

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} \\ \mathbf{H} = \dfrac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \end{cases}$$

da cui è possibile ricavare $|\mathbf{M}|$:

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{B}| \frac{\mu_r - 1}{\mu_r \mu_0} .$$

Numericamente,

$$M = 0{,}126 \frac{99}{100 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = 9{,}90 \cdot 10^4\ \mathrm{A/m} .$$