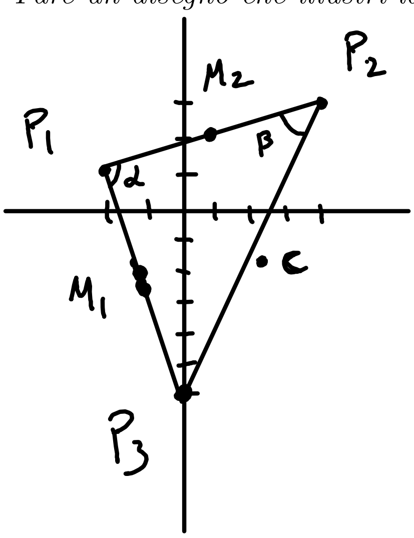
Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo il triangolo* T *di vertici* $P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ *e* $P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$.

1. *(1 punto) Calcolare il perimetro di* T.
2. *(1 punto) Calcolare l'area di* T.
3. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche e cartesiana della retta* r *passante per* P_2 *e* P_3.
4. *(1 punto) Stabilire se* T *è acutangolo o ottusangolo.*
5. *(1 punto) Calcolare il circocentro* C *di* T.
6. *(1 punto) Stabilire se* C *è interno o esterno a* T*, motivando la risposta.*
7. *(1 punto) In* $\mathcal{V}^2_O$ *dare la definizione di somma, ovvero dati due punti* $A, B \in \mathcal{E}^2$ *dare la definizione di* $\vec{OA} + \vec{OB}$.

Fare un disegno che illustri la situazione.



1) $\vec{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\vec{P_3P_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$

Perimetro $= \|\vec{P_1P_2}\| + \|\vec{P_1P_3}\| + \|\vec{P_3P_2}\| = 2\sqrt{10} + \sqrt{53} + \sqrt{97}$

2) $A_T = \frac{1}{2} |\det(\vec{P_1P_2} | \vec{P_1P_3})| = \frac{1}{2} |-46| = 23$

3) $r = P_3 + \langle \vec{P_3P_2} \rangle : \; 9x - 4y = 24$

4) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{P_1P_2} \cdot \vec{P_1P_3}}{\|\vec{P_1P_2}\| \, \|\vec{P_1P_3}\|} = -\dfrac{2}{2\sqrt{10}\sqrt{53}} < 0$

$\Rightarrow T$ è ottusangolo.

5) $M_1 = \dfrac{P_1 + P_3}{2} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$. asse $\overline{P_1P_3}$: $\vec{P_1P_3} \cdot X = \vec{P_1P_3} \cdot M_1$, $2x - 7y = \frac{31}{2}$

$M_2 = \dfrac{P_1 + P_2}{2} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. asse $\overline{P_1P_2}$: $\vec{P_1P_2} \cdot X = \vec{P_1P_2} \cdot M_2$, $3x + y = 5$

$C : \begin{cases} 2x - 7y = \frac{31}{2} \\ 3x + y = 5 \end{cases}$. Cramer : $C = \dfrac{1}{46}\begin{pmatrix} 101 \\ -73 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2{,}2 \\ -1{,}8 \end{pmatrix}$

6) T ottusangolo $\Rightarrow C$ esterno. Oppure,

$\text{dist}(P_1, r) = \dfrac{|-18-4-24|}{\sqrt{97}} = \dfrac{46}{\sqrt{97}} \sim 4{,}67$ $\Rightarrow \text{dist}(P_1, r) < \text{dist}(P_1, C)$ $\Rightarrow C$ è esterno.

$\text{dist}(C, P_1) = \dfrac{1}{46} \left\| \begin{pmatrix} 193 \\ 119 \end{pmatrix} \right\| \sim 4{,}92$

7) $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$ dove C è t.c. $\vec{AC} \cong \vec{OB}$.

Esercizio 2. *In* $\mathbb{R}^3$ *consideriamo la retta* $r : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + 3y - 3z = 0 \end{cases}$ *ed il piano* $\pi : x - 3y + 2z = 2$.

1. *(1 punto) Calcolare* $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.
2. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche di* r.
3. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche di* π.
4. *(1 punto) Calcolare* $P_0 = r \cap \pi$.
5. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche della retta passante per* P_0 *ed ortogonale a* π.
6. *(1 punto) Siano* $r : AX = b$ *ed* $\pi = P + \langle v_1, v_2 \rangle$ *una retta ed un piano di* $\mathbb{R}^3$*, rispettivamente. Scrivere le condizioni di incidenza e di parallelismo di* r *e* π *e dedurre una tabella con le possibili posizioni reciproche.*
7. *(1 punto) Sapendo che* $u = v_1 \wedge v_2 \in \mathbb{R}^3$*, quanto fa* $(2v_1 - v_2) \wedge (v_1 + 3v_2)$*?*

<u>Sol.</u>: 1) $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$. 2) $r = \langle v \rangle$. 3) $\pi = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

4) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & -5 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 14 \end{array}\right)$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow r \cap \pi = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = v.$

5) $P_0 + \langle n \rangle$, dove $n = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

6) $r \parallel \pi \iff rg(Av_1 | Av_2) = 1$.
$r \cap \pi \neq \emptyset \iff \exists\, s,t : A(P + tv_1 + sv_2) = b \iff rg(Av_1 | Av_2) = rg(Av_1 | Av_2 | b - AP)$

$rg(Av_1 \mid Av_2)$	$rg(Av_1 \mid Av_2 \mid b-AP)$	
1	1	$r \subset \pi$
1	2	$r \parallel \pi$, $r \cap \pi = \emptyset$
2	2	$r \cap \pi = \{$punto$\}$.

7) $(2v_1 - v_2) \wedge (v_1 + 3v_2) = 6\, v_1 \wedge v_2 - v_2 \wedge v_1 = 6\, v_1 \wedge v_2 + v_1 \wedge v_2 = 7u$.

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 & 5 \\ -8 & -3 & 0 & -6 \\ -4 & -1 & -1 & -3 \\ -4 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare $P_A(x)$.*
2. *(1 punto) Calcolare il determinante di A.*
3. *(1 punto) Calcolare A^{-1}.*
4. *(1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*
5. *(1 punto) Sia A è una matrice diagonalizzabile con autovalori $\{1, -1\}$. Calcolare A^n per ogni $n \geq 1$.*
6. *(1 punto) Sia A una matrice $h \times k$ di rango r. Calcolare dim $Ker(A)$.*
7. *(1 punto) Dimostrare che due basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ di uno spazio vettoriale V hanno la stessa cardinalità.*

Sol.: 1) $P_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-7 & -3 & 0 & -5 \\ 8 & x+3 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & x+1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & x+3 \end{pmatrix} = (x+1)^2(x-1)^2$

2) $\det(A) = P_A(0) = 1$

3) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -4 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ [algoritmo di inversione]

4) $Sp(A) = \{1, -1\}$. $V_1(A) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -6 & -3 & 0 & -5 \\ 8 & 4 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$= \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim V_1(A) = 1$

$\Rightarrow mg_A(1) = \dim V_1(A) = 1 < 2 = ma_A(1) \Rightarrow A$ non è diag.

5) $A^n = \begin{cases} A & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \mathbb{1}_n & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases}$

6) $\dim \mathrm{Ker} A = k - r$

7) $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ sono lin. Ind., $\mathcal{B}_1 \subset V = \langle \mathcal{B}_2 \rangle$, $\mathcal{B}_2 \subset V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle$. Per il Teorema fondamentale sull'ind. lin., $|\mathcal{B}_1| \leq |\mathcal{B}_2| \leq |\mathcal{B}_1|$.

Esercizio 4. 1. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B}_1 = (v_1 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix})$ *è un base di* $\mathbb{R}^2$.

2. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B}_2 = (w_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix})$ *è un base di* $\mathbb{R}^3$.

3. *(1 punto) Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *la funzione lineare tale che* $f(v_1) = 2w_1 - w_2 + w_3$ *e* $f(v_2) = w_1 + w_2$. *Calcolare la matrice* F *associata a* f *nelle basi* $\mathcal{B}_1$ *e* $\mathcal{B}_2$.

4. *(1 punto) Sia* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *la funzione lineare tale che* $g(w_1) = v_1 + v_2$, $g(w_2) = v_1 - v_2$ *e* $g(w_3) = 2v_1 - v_2$. *Calcolare la matrice* G *associata a* g *nelle basi* $\mathcal{B}_2$ *e* $\mathcal{B}_1$.

5. *(1 punto) Calcolare la matrice* A *associata a* $g \circ f$ *nella base canonica* $\mathcal{C}_2 = (e_1, e_2)$ *di* $\mathbb{R}^2$.

6. *(1 punto) Stabilire se* $g \circ f$ *è invertibile e nel caso lo sia calcolare la sua inversa.*

7. *(1 punto) Sia* $f : V \to W$ *lineare. Dimostrare che* $Im(f)$ *è un sottospazio vettoriale di* W.

Sol.: 1) $\det(v_1|v_2) = 3-2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{B}_1$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

2) $\det(w_1|w_2|w_3) = \det\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&1\\2&1&1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix} = -1 \neq 0$

$\Rightarrow \mathcal{B}_2$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

3) $F = \begin{pmatrix}2&1\\-1&1\\1&0\end{pmatrix}$ 4) $G = \begin{pmatrix}1&1&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}$

5)
$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, equal] \arrow[d, "e_2"'] & \cdot \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathcal{B}_1"] & \cdot \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mathcal{B}_2"] & \cdot \arrow[r, equal] \arrow[d, "\mathcal{B}_1"] & \cdot \arrow[d, "e_2"] \\
\cdot & \cdot \arrow[l, "\mathcal{B}_1"'] \arrow[r, "F"'] & \cdot \arrow[r, "G"'] & \cdot \arrow[r, "\mathcal{B}_1"'] & \cdot
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}$ $\mathcal{B}_1^{-1} = \begin{pmatrix}1&-2\\-1&3\end{pmatrix}$

$A = \mathcal{B}_1 G F \mathcal{B}_1^{-1} = \begin{pmatrix}7&-8\\3&-4\end{pmatrix}$

6) $(g \circ f)^{-1} = S_{A^{-1}}$ $A^{-1} = \dfrac{1}{-4}\begin{pmatrix}-4&8\\-3&7\end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}4&-8\\3&-7\end{pmatrix}$

7) $0_W = f(0_V) \in Im f$. $\forall w_1 = f(v_1), \forall w_2 = f(v_2) \in Im f$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$\alpha w_1 + \beta w_2 = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) = f(\alpha v_1 + \beta v_2) \in Im f$.

Esercizio 5. *In $\mathbb{R}^4$, consideriamo:*

$$U : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \end{cases}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle, \quad P = \begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Calcolare una base $\mathcal{B}_U$ di U.*
2. *(2 punti) Calcolare la matrice P_U di proiezione ortogonale su U.*
3. *(1 punto) Calcolare la distanza di P da U.*
4. *(2 punti) Calcolare la dimensione di $U \cap W$ e la dimensione dei $U + W$.*
5. *(1 punto) Applicare l'algoritmo di Gram-Schmidt all'insieme ($v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$).*

Sol.:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B}_U = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix} \right).$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $P_U = A\,(A^tA)^{-1}A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

3) $\operatorname{dist}(P, U) = \| P - P_U P \| = \left\| \begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\2\\0\end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix}0\\2\\0\\2\end{pmatrix} \right\| = 2\sqrt{2}$

4) $\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix} \notin U$, $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \in U \Rightarrow \dim U \cap W = 1 \Rightarrow$
$\dim U + W = \dim U + \dim W - \dim U \cap W = 3$ per la formula di grammann

5) $F_1 = v_1$. $F_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 = \begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{3}{3} \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$

$F_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 - \frac{v_3 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}.$