

Esame scritto di Geometria.
Ingegneria per l'ambiente ed il territorio.
Primo appello a.a. 2024/25.
Docente: Giovanni Cerulli Irelli.

20 gennaio 2025

Esercizio 1. In (\mathbb{R}^2, \cdot) consideriamo i punti $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. (1 punto) Calcolare il punto medio M del segmento \overline{AB} .
2. (1 punto) Calcolare l'equazione cartesiana dell'asse s del segmento \overline{AB} .
3. (1 punto) Calcolare il punto C ottenuto riflettendo ortogonalmente l'origine O attraverso l'asse s .
4. (2 punti) Stabilire se il quadrilatero $ABCO$ è un quadrato.
5. (1 punto) Calcolare equazioni cartesiane e parametriche della circonferenza \mathcal{C} inscritta nel quadrilatero $ABCO$.
6. (1 punto) Scrivere la matrice R_θ di rotazione in senso anti-orario di un angolo θ .

Fare un disegno che illustri la situazione.

Esercizio 2. In \mathbb{R}^3 consideriamo

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e le due rette $r_1 = P_1 + \langle v_1 \rangle$ e $r_2 = P_2 + \langle v_2 \rangle$.

1. (1 punto) Calcolare $v_1 \wedge v_2$.
2. (1 punto) Trovare l'equazione cartesiana del piano $\pi = P_1 + \langle v_1, v_2 \rangle$.
3. (1 punto) Stabilire la posizione reciproca di r_1 ed r_2 , senza cambiare la loro forma.
4. (1 punto) Calcolare la distanza tra r_1 ed r_2 .
5. (1 punto) Calcolare l'area del triangolo T di vertici v_1 , v_2 e $v_1 + v_2$.
6. (2 punti) Date due rette $r = P_1 + \langle v_1 \rangle$ ed $s = P_2 + \langle v_2 \rangle$ parametriche di \mathbb{R}^3 , scrivere le condizioni di incidenza e di parallelismo di r ed s e dedurre una tabella con le quattro possibili posizioni reciproche.

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & 9 & -15 \\ 4 & 6 & -10 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) *Trovare una base di $\ker(A)$.*
2. (1 punto) *Trovare una base di $\text{Col}(A)$ e calcolare il rango di A .*
3. (1 punto) *Calcolare il polinomio caratteristico di A .*
4. (2 punti) *Stabilire se A è diagonalizzabile su \mathbb{R} e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*
5. (1 punto) *Calcolare A^n per ogni $n \geq 1$.*
6. (1 punto) *Enunciare la formula della dimensione per un'applicazione lineare $f : V \rightarrow W$.*

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Consideriamo la funzione $f : V \rightarrow V$ data da

$$f(p(x)) = (x+1)p(x-1) + p(1) + p'(x^2-1) - xp(x)$$

1. (1 punto) Calcolare $f(2 - 3x + 4x^2)$.
2. (1 punto) Dimostrare che f è lineare.
3. (1 punto) Calcolare la matrice A associata ad f nella base standard di V .
4. (1 punto) Trovare una base $\mathcal{B}_{\text{Ker}(f)}$ del nucleo di f .
5. (1 punto) Trovare una base $\mathcal{B}_{\text{Im}(f)}$ dell'immagine di f .
6. (1 punto) Calcolare la matrice C associata ad f nella base $\mathcal{B} = (1+x, 1+2x, -x+x^2)$ di V (sia in partenza che in arrivo).
7. (1 punto) Dimostrare che il nucleo di un'applicazione lineare $f : V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di V .

Esercizio 5. Si consideri il vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ e la matrice $A = vv^t$.

1. (1 punto) Calcolare A .
2. (1 punto) Trovare una base per $\text{Col}(A)$ e calcolare il rango di A .
3. (1 punto) Calcolare una base $\mathcal{B}_{\text{Ker}(A)}$ del nucleo di A .
4. (1 punto) Dimostrare che A è ortogonalmente diagonalizzabile.
5. (1 punto) Calcolare lo spettro di A .
6. (1 punto) Trovare una matrice ortogonale B ed una matrice diagonale D tali che $B^t A B = D$.
7. (1 punto) Calcolare la matrice P_v di proiezione ortogonale sulla retta generata da v e la distanza del punto $Q = (8, 4, -4, 4)^t$ dall'iperpiano $\pi = v^\perp$.

