

Nome, Cognome e Matricola

---

Esame scritto di Geometria  
Ingegneria per l'ambiente ed il territorio  
Primo appello a.a. 2023/24  
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

18 gennaio 2024

**Esercizio 1.** In  $(\mathbb{R}^2, \cdot)$  consideriamo i punti  $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

1. (1 punto) Calcolare equazioni parametriche e cartesiane della retta  $r$  passante per  $C$  e  $P$ .
2. (1 punto) Calcolare la pendenza  $m$  della retta  $r$ .
3. (1 punto) Calcolare il punto medio  $M$  del segmento  $\overline{CP}$ .
4. (1 punto) Calcolare equazioni cartesiane dell'asse  $s$  del segmento  $\overline{CP}$ .
5. (1 punto) Calcolare equazioni cartesiane e parametriche della circonferenza  $\mathcal{C}$  di centro  $C$  e passante per  $P$ .
6. (1 punto) Trovare i due punti  $A$  e  $B$  tali che i triangoli  $ACP$  e  $BCP$  siano equilateri.
7. (1 punto) Calcolare l'area del rombo di vertici  $A, C, B$  e  $P$ .

Fare un disegno che illustri la situazione.

**Esercizio 2.** In  $\mathbb{R}^3$  consideriamo

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e le due rette  $r_1 = P_1 + \langle v_1 \rangle$  e  $r_2 = P_2 + \langle v_2 \rangle$ .

1. (1 punto) Calcolare  $v_1 \wedge v_2$ . Dedurre che  $r_1$  e  $r_2$  non sono parallele.
2. (1 punto) Trovare equazioni cartesiane del piano  $\pi = P_1 + \langle v_1, v_2 \rangle$ . Dedurre che le rette  $r_1$  ed  $r_2$  si intersecano in un punto.
3. (1 punto) Calcolare il punto di intersezione  $P_3 = r_1 \cap r_2$ , senza cambiare la forma di  $r_1$  e di  $r_2$ .
4. (1 punto) Calcolare l'area del triangolo  $T$  di vertici  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ .
5. (1 punto) Calcolare equazioni parametriche e cartesiane della retta  $r_3$  passante per  $P_1$  e  $P_2$ .
6. (1 punto) Calcolare equazioni parametriche per la bisettrice del triangolo  $T$  nel vertice  $P_3$ .
7. (1 punto) E' vero che  $(v_1 \wedge v_1) \wedge v_2 = v_1 \wedge (v_1 \wedge v_2)$ ?

**Esercizio 3.** Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Calcolare la traccia di  $A$ .
2. (1 punto) Trovare una base di  $\text{Col}(A)$  e calcolare il rango di  $A$ .
3. (1 punto) Stabilire se il vettore  $v = (1, 1, 0, 0)^t$  è un autovettore per  $A$ .
4. (1 punti) Calcolare il polinomio caratteristico di  $A$ .
5. (1 punto) Stabilire se  $A$  è diagonalizzabile su  $\mathbb{R}$  e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile  $B$  ed una matrice diagonale  $D$  tali che  $B^{-1}AB = D$ .
6. (1 punto) Trovare una formula per calcolare  $A^2X$  per ogni  $X \in \mathbb{R}^4$ .
7. (1 punto) Trovare una formula per  $A^n$  per ogni  $n \geq 1$ .

**Esercizio 4.** Sia  $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$  lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale di due a coefficienti reali. Si consideri l'endomorfismo lineare  $F : V \rightarrow V$  di  $V$  definito come

$$F(p(x)) = xp'(x+1) - x^2p''(x-1)$$

per ogni  $p(x) \in V$ .

1. (1 punto) Calcolare  $F(3 - 2x + 3x^2)$ .
2. (1 punto) Calcolare la matrice  $A$  associata ad  $F$  nella base standard  $\mathcal{C} = (1, x, x^2)$  di  $V$ .
3. (1 punto) Calcolare il rango di  $F$ .
4. (1 punto) Trovare una base  $\mathcal{B}_{\text{Ker}(F)}$  del nucleo di  $F$ .
5. (1 punto) Trovare una base  $\mathcal{B}_{\text{Im}(F)}$  dell'immagine di  $F$ .
6. (1 punto) Dimostrare che  $\mathcal{B} = (1 - x - x^2, 1 + x + 2x^2, x + 2x^2)$  è una base di  $V$ .
7. (1 punto) Calcolare la matrice  $C$  associata ad  $F$  nella base  $\mathcal{B}$ .

**Esercizio 5.** Si consideri il vettore  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$  e la matrice  $A = vv^t$ .

1. (1 punto) Calcolare  $A$ .
2. (1 punto) Trovare una base per  $\text{Col}(A)$  e calcolare il rango di  $A$ .
3. (1 punto) Calcolare una base  $\mathcal{B}_{\text{Ker}(A)}$  del nucleo di  $A$ .
4. (1 punto) Dimostrare che  $A$  è ortogonalmente diagonalizzabile.
5. (1 punto) Calcolare lo spettro di  $A$ .
6. (1 punto) Trovare una matrice ortogonale  $B$  ed una matrice diagonale  $D$  tali che  $B^t A B = D$ .
7. (1 punto) Calcolare la matrice  $P_v$  di proiezione ortogonale sulla retta generata da  $v$  e la distanza del punto  $Q = (4, 8, 0, -4)^t$  dall'iperpiano  $\pi = v^\perp$ .