Esame scritto di Geometria
Ingegneria per l'ambiente ed il territorio
Quarto appello aa: 2023/24
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

15 luglio 2024

Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo* $v_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ *e* $v_2 = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. *(2 punti) Sia* α *l'angolo minore compreso tra* v_1 *e* v_2. *Calcolare* $\cos(\alpha)$ *ed* α.
2. *(2 punti) Trovare i punti* A, B *e* C *tali che*

$$\vec{OA} = -2v_1, \quad \vec{OB} = \tfrac{3}{2}v_2, \quad \vec{OC} = -2v_1 + \tfrac{3}{2}v_2.$$

3. *(1 punto) Calcolare l'area del quadrilatero* $\mathcal{P}$ *di vertici* O, A, B *e* C.
4. *(1 punto) Trovare il punto* C' *ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto* C *attraverso la retta* r *passante per* A *e* B.
5. *(1 punto) Trovare il punto* D *con le seguenti proprietà: 1) il triangolo* ADB *abbia area uguale all'area del triangolo* ACB, *2) il triangolo* ADB *sia isoscele con base* $\overline{AB}$, *3)* D *abbia coordinate positive.*

Fare un disegno che illustri la situazione.

Soluzione Esercizio 1.

Esercizio 2. *In* $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ *consideriamo*

$$P = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Calcolare* $v_1 \wedge v_2$.
2. *(1 punto) Calcolare l'equazione cartesiana del piano* $\pi = P + \langle v_1, v_2 \rangle$.
3. *(1 punto) Calcolare equazioni cartesiane della retta* $r = P + \langle v_1 \rangle$.
4. *(1 punto) Calcolare la proiezione ortogonale* $pr_{v_1}(\overrightarrow{PQ})$ *del vettore* $\overrightarrow{PQ}$ *sul vettore* v_1.
5. *(1 punto) Calcolare la distanza del punto* Q *dalla retta* r.
6. *(1 punto) Calcolare la lunghezza dell'angolo acuto compreso tra* v_1 *e* v_2.
7. *(1 punto) Dati due vettori* $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ *linearmente indipendenti dimostrare che l'angolo compreso tra i vettori* w_2 *e* $w_1 \wedge (w_1 \wedge w_2)$ *è ottuso.*

Soluzione Esercizio 2.

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare la traccia di A.*
2. *(1 punto) Calcolare una base di $Col(A)$ ed il rango di A.*
3. *(1 punto) Calcolare una base del nucleo di A.*
4. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
5. *(1 punto) Calcolare lo spettro di A.*
6. *(1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. Nel caso lo sia, trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*
7. *(1 punto) Sia $n \geq 2$ e sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ una matrice $n \times n$ avente rango uguale a 1 e traccia diversa da zero. Dimostrare che $Sp(A) = \{Tr(A), 0\}$ e che A è diagonalizzabile su $\mathbb{K}$.*

Soluzione Esercizio 3.

Esercizio 4. *Come al solito denotiamo con $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale di n, a coefficienti reali.*

Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}[x]_{\leq 1} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ data da

$$f(p(x)) = (x+1)p(x-1) + p(x+1) - p(x-1).$$

1. *(1 punto) Calcolare $f(1-x)$.*
2. *(1 punto) Dimostrare che f è lineare.*
3. *(1 punto) Dimostrare che f è iniettiva.*
4. *(1 punto) Dimostrare che l'insieme $\mathcal{B} = (f(1), f(x), x^2)$ è una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.*
5. *(1 punto) Sia $g : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ l'unica funzione lineare tale che*

   $$g(f(1)) = 1 - x, \quad g(f(x)) = 1 + 2x, \quad g(x^2) = 2 - 3x.$$

   Calcolare la matrice C associata a g nella base $\mathcal{B}$ e nella base standard $\mathcal{C} = (1, x)$ di $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$.
6. *(1 punto) Calcolare la matrice D associata a $g \circ f$ nella base standard di $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$.*
7. *(1 punto) Se D è invertibile calcolare la sua inversa, altrimenti calcolare una base del suo nucleo.*

Soluzione Esercizio 4.

Esercizio 5. *Consideriamo le seguenti matrici reali:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Calcolare una base di $Col(A)$.*
2. *(1 punto) Stabilire se il sistema $Ax = b$ è risolubile.*
3. *(3 punti) Calcolare la proiezione ortogonale $c = pr_{Col(A)}(b)$ di b su $Col(A)$.*
4. *(2 punti) Risolvere il sistema $Ax = c$.*

Soluzione Esercizio 5.