

Nome, Cognome e Matricola

Esame scritto di Geometria 1
Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio
Appello di Gennaio 2022
Docenti: Giovanni Cerulli Irelli,
Marco Trevisiol

24 gennaio 2022

Esercizio 1. In (\mathbb{R}^2, \cdot) consideriamo i due punti $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $P_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. (1 punto) Sia M il punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$. Calcolare M .
2. (1 punto) Sia r l'asse del segmento $\overline{P_1P_2}$. Calcolare le equazioni cartesiane e parametriche di r .
3. (2 punti) Trovare un punto P_3 dell'asse r che abbia coordinate intere positive e tale che il triangolo $T = \triangle P_1P_2P_3$ di vertici P_1, P_2, P_3 abbia area uguale a $\frac{15}{2}$.
4. (2 punti) Scrivere il baricentro B di T come combinazione convessa di M e di P_3 .
5. (2 punti) Ogni punto P del segmento $\overline{MP_3}$ divide il triangolo T in tre triangoli

$$T_1 = \triangle P_3PP_2, \quad T_2 = \triangle P_1PP_3, \quad T_3 = \triangle P_1PP_2.$$

Dimostrare che $\text{Area}(T_1) = \text{Area}(T_2)$. Sia $t = \frac{\text{Area}(T_1)}{\text{Area}(T)} = \frac{\text{Area}(T_2)}{\text{Area}(T)}$ e denotiamo il corrispondente punto P come P_t . Dimostrare che $B = P_{1/3}$ e disegnare il segmento $S = \{P_t | t \in [0, 1/3]\}$.

Fare un disegno che illustri la situazione.

Esercizio 2. Si considerino le seguenti due rette di \mathbb{R}^3 :

$$r_1 : \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 2x - 3y + 4z = -1 \end{cases} \quad e \quad r_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

1. (1 punto) Determinare la posizione reciproca di r_1 ed r_2 , senza cambiare la loro forma.
2. (1 punto) Trovare una forma parametrica per r_1 ed una forma cartesiana per r_2 .
3. (2 punti) Calcolare la distanza tra r_1 ed r_2 .
4. (2 punti) Trovare le equazioni parametriche e cartesiane del piano π contenente r_2 e parallelo ad r_1 .
5. (1 punto) Si consideri la seguente famiglia di rette parallele ad r_1 dipendente dal parametro reale k :

$$r_1(k) : \begin{cases} x - y + 3z = k \\ 2x - 3y + 4z = k \end{cases}$$

Trovare tutti i valori di k per i quali $r_1(k) \subset \pi$.

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) *Calcolare il polinomio caratteristico di A .*
2. (1 punto) *Calcolare la molteplicità algebrica di ogni autovalore di A .*
3. (2 punti) *Calcolare le molteplicità geometrica di ogni autovalore di A .*
4. (3 punti) *Stabilire se A è diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

Esercizio 4. Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ dei polinomi di grado minore o uguale di 2 a coefficienti reali. Denotiamo con $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$ la base standard di V . Si consideri l'insieme $\mathcal{B} = \{1 + x, 1 + 2x, 1 + x + x^2\}$.

1. (1 punto) Dimostrare che \mathcal{B} è una base di V .
2. (1 punto) Sia $T : V \rightarrow V$ l'unica applicazione lineare tale che

$$T(1 + x) = 1, \quad T(1 + 2x) = 2, \quad T(1 + x + x^2) = 1 + 2x^2.$$

Scrivere la matrice A che rappresenta T nella base \mathcal{B} in partenza e nella base \mathcal{C} in arrivo.

3. (2 punti) Scrivere la matrice C che rappresenta T nella base \mathcal{C} (sia in partenza che in arrivo).
4. (1 punto) Trovare una base per $\text{Ker}(T)$.
5. (1 punto) Trovare una base per $\text{Im}(T)$.
6. (1 punto) Calcolare $\dim(\text{Ker}(T) + \text{Im}(T))$ e $\dim(\text{Ker}(T) \cap \text{Im}(T))$.

Esercizio 5. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. (1 punto) *Stabilire se il sistema $Ax = b$ sia risolubile.*
2. (2 punti) *Calcolare la matrice P di proiezione ortogonale su $\text{Col}(A)$.*
3. (1 punto) *Calcolare la proiezione ortogonale b' di b su $\text{Col}(A)$.*
4. (1 punto) *Risolvere il sistema $Ax = b'$.*
5. (2 punti) *Calcolare la distanza di b da $\text{Col}(A)$.*

