

Esame scritto di Geometria
Ingegneria chimica
Quarto appello aa: 2023/24
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

15 luglio 2024

Esercizio 1. In $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ consideriamo $v_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. (2 punti) Sia α l'angolo minore compreso tra v_1 e v_2 . Calcolare $\cos(\alpha)$ ed α .

2. (2 punti) Trovare i punti A , B e C tali che

$$\vec{OA} = -2v_1, \quad \vec{OB} = \frac{3}{2}v_2, \quad \vec{OC} = -2v_1 + \frac{3}{2}v_2.$$

3. (1 punto) Calcolare l'area del quadrilatero $\mathcal{P}$ di vertici O , A , B e C .

4. (1 punto) Trovare il punto C' ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto C attraverso la retta r passante per A e B .

5. (1 punto) Trovare il punto D con le seguenti proprietà: 1) il triangolo ADB abbia area uguale all'area del triangolo ACB , 2) il triangolo ADB sia isoscele con base $\overline{AB}$, 3) D abbia coordinate positive.

Fare un disegno che illustri la situazione.

Soluzione Esercizio 1.

Esercizio 2. In $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ consideriamo

$$P = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. (1 punto) Calcolare $v_1 \wedge v_2$.
2. (1 punto) Calcolare l'equazione cartesiana del piano $\pi = P + \langle v_1, v_2 \rangle$.
3. (1 punto) Calcolare equazioni cartesiane della retta $r = P + \langle v_1 \rangle$.
4. (1 punto) Calcolare la proiezione ortogonale $pr_{v_1}(\vec{PQ})$ del vettore $\vec{PQ}$ sul vettore v_1 .
5. (1 punto) Calcolare la distanza del punto Q dalla retta r .
6. (1 punto) Calcolare la lunghezza dell'angolo acuto compreso tra v_1 e v_2 .
7. (1 punto) Dati due vettori $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ linearmente indipendenti dimostrare che l'angolo compreso tra i vettori w_2 e $w_1 \wedge (w_1 \wedge w_2)$ è ottuso.

Soluzione Esercizio 2.

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) *Calcolare la traccia di A .*
2. (1 punto) *Calcolare una base di $\text{Col}(A)$ ed il rango di A .*
3. (1 punto) *Calcolare una base del nucleo di A .*
4. (1 punto) *Calcolare il polinomio caratteristico di A .*
5. (1 punto) *Calcolare lo spettro di A .*
6. (1 punto) *Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. Nel caso lo sia, trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*
7. (1 punto) *Sia $n \geq 2$ e sia $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ una matrice $n \times n$ avente rango uguale a 1 e traccia diversa da zero. Dimostrare che $\text{Sp}(A) = \{\text{Tr}(A), 0\}$ e che A è diagonalizzabile su $\mathbb{K}$.*

Soluzione Esercizio 3.

Esercizio 4. Come al solito denotiamo con $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale di n , a coefficienti reali.

Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}[x]_{\leq 1} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ data da

$$f(p(x)) = (x+1)p(x-1) + p(x+1) - p(x-1).$$

1. (1 punto) Calcolare $f(1-x)$.
2. (1 punto) Dimostrare che f è lineare.
3. (1 punto) Dimostrare che f è iniettiva.
4. (1 punto) Dimostrare che l'insieme $\mathcal{B} = (f(1), f(x), x^2)$ è una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.
5. (1 punto) Sia $g : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ l'unica funzione lineare tale che

$$g(f(1)) = 1-x, \quad g(f(x)) = 1+2x, \quad g(x^2) = 2-3x.$$

Calcolare la matrice C associata a g nella base $\mathcal{B}$ e nella base standard $\mathcal{C} = (1, x)$ di $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$.

6. (1 punto) Calcolare la matrice D associata a $g \circ f$ nella base standard di $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$.
7. (1 punto) Se D è invertibile calcolare la sua inversa, altrimenti calcolare una base del suo nucleo.

Soluzione Esercizio 4.

Esercizio 5. *Consideriamo le seguenti matrici reali:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. (1 punto) Calcolare una base di $\text{Col}(A)$.
2. (1 punto) Stabilire se il sistema $Ax = b$ è risolubile.
3. (3 punti) Calcolare la proiezione ortogonale $c = \text{pr}_{\text{Col}(A)}(b)$ di b su $\text{Col}(A)$.
4. (2 punti) Risolvere il sistema $Ax = c$.

Soluzione Esercizio 5.

