La Teoria dei Giochi ed il Problema del Free Riding

Giuseppe De Marco

DiSAQ, Dipartimento di Studi Aziendali e Quantitativi,
UNIVERSITÀ DI NAPOLI PARTHENOPE

CSEF, UNIVERSITÀ DI NAPOLI FEDERICO II

22 Marzo 2021

Free Riding

Il fenomeno del *free riding* emerge quando:

- all'interno di un gruppo di individui, alcuni membri evitano di dare il proprio contributo ad un bene comune o ad un progetto comune, ritenendo che il gruppo possa funzionare ugualmente nonostante il loro rifiuto
- questi individui beneficiano del bene comune senza accollarsi lo sforzo che il loro contributo comporterebbe.
- *Azzardo Morale*: tendenza a perseguire i propri interessi a spese della controparte, confidando nell'impossibilità di verificare la presenza di dolo o negligenza

Esempi di *free riding* sono di grande attualità:

- Campagna vaccinale
- Servizi - tasse
- Progetti di gruppo

Teoria dei Giochi

La *Teoria dei Giochi* è la teoria matematica che studia l'interazione strategica tra individui razionali.

La *Teoria dei Giochi* permette di comprendere analiticamente fenomeno del free riding:

- Il contributo di tutti al bene comune è la soluzione ottimale per il gruppo nella sua interezza e corrisponde all'*Ottimo di Pareto* del gioco.
- Tuttavia, questa soluzione non corrisponde al cosiddetto *Equilibrio di Nash*: alcuni individui nel gruppo traggono beneficio dal deviare unilateralmente dall'Ottimo di Pareto. contribuendo, quindi, in misura minore degli altri al bene comune.

Un semplice gioco

Ci sono solo due giocatori Daniele e Francesco.

- Ognuno dei due giocatori può decidere di contribuire al bene pubblico o no, quindi l'insieme delle strategie di
  - Daniele è $S_D = \{c, n\}$ dove:
    c: contribuisce
    n: non contribuisce
  - Francesco è $S_F = \{C, N\}$ dove:
    C: contribuisce
    N: non contribuisce

- Alla fine del gioco ci sono quindi solo quattro possibilità:

$$S_D \times S_F = \{(c, C); (c, N); (n, C), (n, N)\}$$

- $S_D \times S_F$ è l'insieme degli esiti del gioco. Si chiamano *profili di strategie*.

Un semplice gioco

- Il bene pubblico viene quantificato da un valore B che dipende dal contributo dei giocatori:
  - $B(c, C) = 20$, massimo contributo
  - $B(c, N) = B(n, C) = 12$, contributo parziale
  - $B(n, N) = 0$, contributo nullo
- Per ognuno dei due giocatori, lo *sforzo* di contribuire al bene pubblico ha un costo quantificabile:
  - Il costo di Daniele è :
    $k_D(c) = 7$ se decide di contribuire
    $k_D(n) = 0$ se decide di non contribuire
  - Il costo di Francesco è :
    $k_F(C) = 7$ se decide di contribuire
    $k_F(N) = 0$ se decide di non contribuire

Un semplice gioco

- Supponendo che Francesco e Daniele si dividano il bene pubblico in parti uguali, ciascuno di loro ha una *utilità* finale che dipende dal profilo di strategie.
  - Ad esempio, se entrambi contribuiscono, l'esito del gioco è il profilo di strategie (c, C). In questo caso:
    - l'utilità di Daniele è:

$$u_D(c, C) = \frac{B(c, C)}{2} - k_D(c) = \frac{20}{2} - 7 = 3$$

    - l'utilità di Francesco è:

$$u_F(c, C) = \frac{B(c, C)}{2} - k_F(c) = \frac{20}{2} - 7 = 3$$

Un semplice gioco

- In generale,
  - per ogni profilo di strategie (x, y) in $S_D \times S_F$:
    - l'utilità di Daniele è:

$$u_D(x, y) = \frac{B(x, y)}{2} - k_D(x)$$

    - l'utilità di Francesco è:

$$u_F(x, y) = \frac{B(x, y)}{2} - k_F(x)$$

Un semplice gioco

- Allora il gioco (in forma strategica) si rappresenta con

	C	N
c	$u_D(c,C),\ u_F(c,C)$	$u_D(c,N),\ u_F(c,N)$
n	$u_D(n,C),\ u_F(n,C)$	$u_D(n,N),\ u_F(n,N)$

Un semplice gioco

- Quindi

	C	N
c	$\frac{B(c,C)}{2} - k_D(c),\ \frac{B(c,C)}{2} - k_F(C)$	$\frac{B(c,N)}{2} - k_D(c),\ \frac{B(c,N)}{2} - k_F(N)$
n	$\frac{B(n,C)}{2} - k_D(n),\ \frac{B(n,C)}{2} - k_F(C)$	$\frac{B(n,N)}{2} - k_D(n),\ \frac{B(n,N)}{2} - k_F(N)$

Un semplice gioco

- In numeri

	C	N
c	3, 3	-1, 6
n	6, -1	0, 0

- Questo tipo di gioco è anche come noto come *dilemma del prigioniero*: applicazioni in tante discipline

Un semplice gioco

- L'*Ottimo di Pareto* corrisponde al profilo di strategie efficiente, cioè quello che rende massima l'utilità *sociale*

$$W(x, y) = u_D(x, y) + u_F(x, y)$$

	C	N
c	$W(c, C) = u_D(c, C) + u_F(c, C) = 6$	$W(c, N) = 5$
n	$W(n, C) = 5$	$W(n, N) = 0$

- (c, C) è quindi l'ottimo di Pareto

Un semplice gioco

- Tuttavia, in assenza di accordi vincolanti fatti prima del gioco, Daniele e Francesco non giocheranno mai (c, C).
- Giocheranno invece (n, N):

	C	N
c	3, 3	-1, 6
n	6, -1	0, 0

- La strategia n è dominante per Daniele:
  qualsiasi sia la strategia di Francesco, Daniele preferisce n a c.
- Analogamente, la strategia N è dominante per Francesco.

Un semplice gioco

- Il precedente esempio mostra perchè, in assenza di accordi vincolanti, i giocatori tendono a non contribuire al bene pubblico, facendo free riding.
- Il prossimo esempio mostrerà che questo fenomeno emerge anche quando non ci sono strategie dominanti:
  - Entrano in gioco gli *equilibri di Nash*.

Esempio 2

- Prendiamo il gioco precedente cambiando solo i costi: $k_D(c) = k_F(C) = 7 \rightarrow k_D(c) = k_F(C) = 5$
- Il gioco diventa

	C	N
c	5, 5	1, 6
n	6, 1	0, 0

- (c, C) è ancora Ottimo di Pareto

Esempio 2

- Prendiamo il gioco precedente cambiando solo i costi: $k_D(c) = k_F(C) = 7 \rightarrow k_D(c) = k_F(C) = 5$
- Il gioco diventa

	C	N
c	5, 5	1, 6
n	6, 1	0, 0

- (c, C) è ancora Ottimo di Pareto
- Non ci sono strategie dominanti.

Esempio 2

	C	N
c	5, 5	1, 6
n	6, 1	0, 0

I giocatori non sceglieranno mai (c, C) perchè (c, C) non è un *equilibrio di Nash*:

- Ciascuno di loro ha interesse a deviare *unilateralmente* da (c, C)

Esempio 2

Più precisamente

	C	N
c	5, 5	1, 6
n	6, 1	0, 0

- Sapendo che Francesco sceglierà C, Daniele ha incentivo a deviare dalla strategia c alla strategia n: passa dall'utilità $u_D(c, C) = 5$ all'utilità $u_D(n, C) = 6$
- Stessa cosa per Francesco

Implementazione mediante equilibri di Nash

- Un *equilibrio di Nash* è quindi un profilo di strategie dal quale nessun giocatore ha interesse a deviare in modo unilaterale.
- Problema: può un regolatore esterno creare un sistema di incentivi in modo che i giocatori giochino l'ottimo di Pareto? In altre parole, può un regolatore esterno creare un sistema di incentivi per i quali l'ottimo di Pareto sia anche un equilibrio di Nash?

Implementazione mediante equilibri di Nash

- Nel gioco precedente, subentra un regolatore esterno che distribuisce il bene pubblico tra Daniele e Francesco:
  - Il regolatore distribusce $B(c, C)$ in α_D e α_F.
    α_D è la parte di $B(c, C)$ che viene data a Daniele,
    α_F è la parte di $B(c, C)$ che il viene data a Francesco,
    quindi
    $$\alpha_D + \alpha_F = B(c, C) = 20$$
  - Il regolatore distribusce $B(c, N) = B(n, C)$ in β_D e β_F.
    β_D è la parte di $B(c, N) = B(n, C)$ che viene data a Daniele,
    β_F è la parte di $B(c, N) = B(n, C)$ che il viene data a Francesco,
    quindi
    $$\beta_D + \beta_F = B(c, N) = B(n, C) = 12$$

Implementazione mediante equilibri di Nash

Il gioco diventa

	C	N
c	$\alpha_D - 5,\ \alpha_F - 5$	$\beta_D - 5,\ \beta_F$
n	$\beta_D,\ \beta_F - 5$	$0,\ 0$

con $\alpha_D + \alpha_F = 20$ e $\beta_D + \beta_F = 12$

- (c, C) è l'ottimo di Pasreto.
- Esistono $\alpha_D, \alpha_F, \beta_D, \beta_F$ per i quali (c, C) è un equilibrio di Nash?

Implementazione mediante equilibri di Nash

Si tratta di trovare $\alpha_D, \alpha_F, \beta_D, \beta_F$ che soddisfano il seguente sistema:

$$\begin{cases} i) & \alpha_D - 5 \geqslant \beta_D \\ ii) & \alpha_F - 5 \geqslant \beta_F \\ iii) & \alpha_D + \alpha_F = 20 \\ iv) & \beta_D + \beta_F = 12 \end{cases}$$

- Sommando *i*) e *ii*) otteniamo

$$\alpha_D - 5 + \alpha_F - 5 = 10 \geqslant \beta_D + \beta_F = 12$$

  che è impossibile

- Non è possibile quindi implementare (c, C) come equilibrio di Nash.

Implementazione mediante equilibri di Nash

Quindi, come può il regolatore costruire gli incentivi per rendere (c, C) un equilibrio di Nash?

- Idea: punire chi devia (*budget breaking*, Holmstrom)
- Il regolatore sottrae un pò di utilità nel caso osservi una deviazione da (c, C): in pratica, la condizione *iv*) diventa

$$\beta_D + \beta_F \leqslant 12$$

Implementazione mediante equilibri di Nash

Si tratta adesso di trovare $\alpha_D, \alpha_F, \beta_D, \beta_F$ che soddisfano il seguente sistema:

$$\begin{cases} i) & \alpha_D - 5 \geqslant \beta_D \\ ii) & \alpha_F - 5 \geqslant \beta_F \\ iii) & \alpha_D + \alpha_F = 20 \\ iv) & \beta_D + \beta_F \leqslant 12 \end{cases}$$

che ha infinite soluzioni, ad esempio

$$\alpha_D = \alpha_F = 10, \quad \beta_D = \beta_F = 4$$

Conclusione: L'incentivo a contribuire al bene pubblico comporta, in taluni casi, perdita di risorse e inneficienze.