COMPITO B

B1

1)
$$a_n = \frac{1}{n^\alpha}\log\left(1+\frac{3n-1}{n^2+2}\right) \sim \frac{1}{n^\alpha}\left(\frac{3n-1}{n^2+2}\right)$$
$$\sim \frac{3}{n^{\alpha+1}}$$
$\Rightarrow \sum a_n$ converge se $\alpha+1>1 \Rightarrow \forall \alpha>0$.

2) In forma normale:
$$y'(x)+\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}y(x)=\frac{1}{\cos(x)}$$
Equazione definita per $x\neq k\pi$; $x\neq \frac{\pi}{2}+h\pi$

Quindi il Problema di Cauchy è definito in $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

~~L'equazione può essere~~

Poiché $a(x)=\operatorname{cotg}(x)\in C^\infty(0,\pi)$
$$f(x)=\frac{1}{\cos(x)}\in C^\infty\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$
$\Rightarrow \exists!$ sol. GLOBALE $y\in C^1\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

La soluzione può essere determinata con la regola risolutiva, oppure riscrivendo l'equazione nella forma
$$\left(\operatorname{sen}(x)\cdot y(x)\right)'=\operatorname{tg}(x)$$

da cui

$\boxed{B_2}$

$$y(x) = \frac{1}{\sin(x)}\left[\int tg(x)\,dx + C\right]$$

$$= \frac{1}{\sin(x)}\left[-\log(\cos x) + C\right]$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 = \sqrt{2}\left[-\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + C\right]$$

$$\Rightarrow C = \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}\log 2$$

$\Rightarrow$ la sol. è

$$y(x) = \frac{1}{\sin x}\left[-\log(\cos x) - \frac{1}{2}\log 2\right]$$

3) La funzione è definita per

$$x^4 \in [-1, 1] \; ; \; x \neq 0$$

cioè $\begin{cases} x^4 \in [0,1] \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-1,1] \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-1, 0) \cup (0, 1].$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - \cos x + \frac{1}{2}x^2}{\arcsin(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) - \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right] + \frac{1}{2}x^2}{x^4 + o(x^4)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{24}\right] + o(x^4)}{x^4} = \frac{11}{24}.$$

4) È sufficiente studiare la funzione $g(x) = e^{-x}(x-1)$ per poi studiarne il modulo. (B_3)

$D = \mathbb{R}$

$g(x) = 0 \iff x = 1$

$g(x) > 0 \iff x > 1$; $g(x) < 0 \iff x < 1$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ ($y = 0$ AS. ORIZZONTALE)

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ andamento superlineare; quindi NO AS. OBLIQUI.

$g(0) = -1$

$g'(x) = e^{-x}(-x+2) > 0 \iff x < 2$ g crescente

$x > 2$ g decrescente

$x = 2$ punto di MAX. $[g(2) = e^{-2}]$

$g''(x) = e^{-x}(x-3) > 0 \iff x > 3$ g convessa

$x < 3$ g concava

$x = 3$ punto di FLESSO $[g(3) = 2e^{-3}]$

Grafico di g:

B4

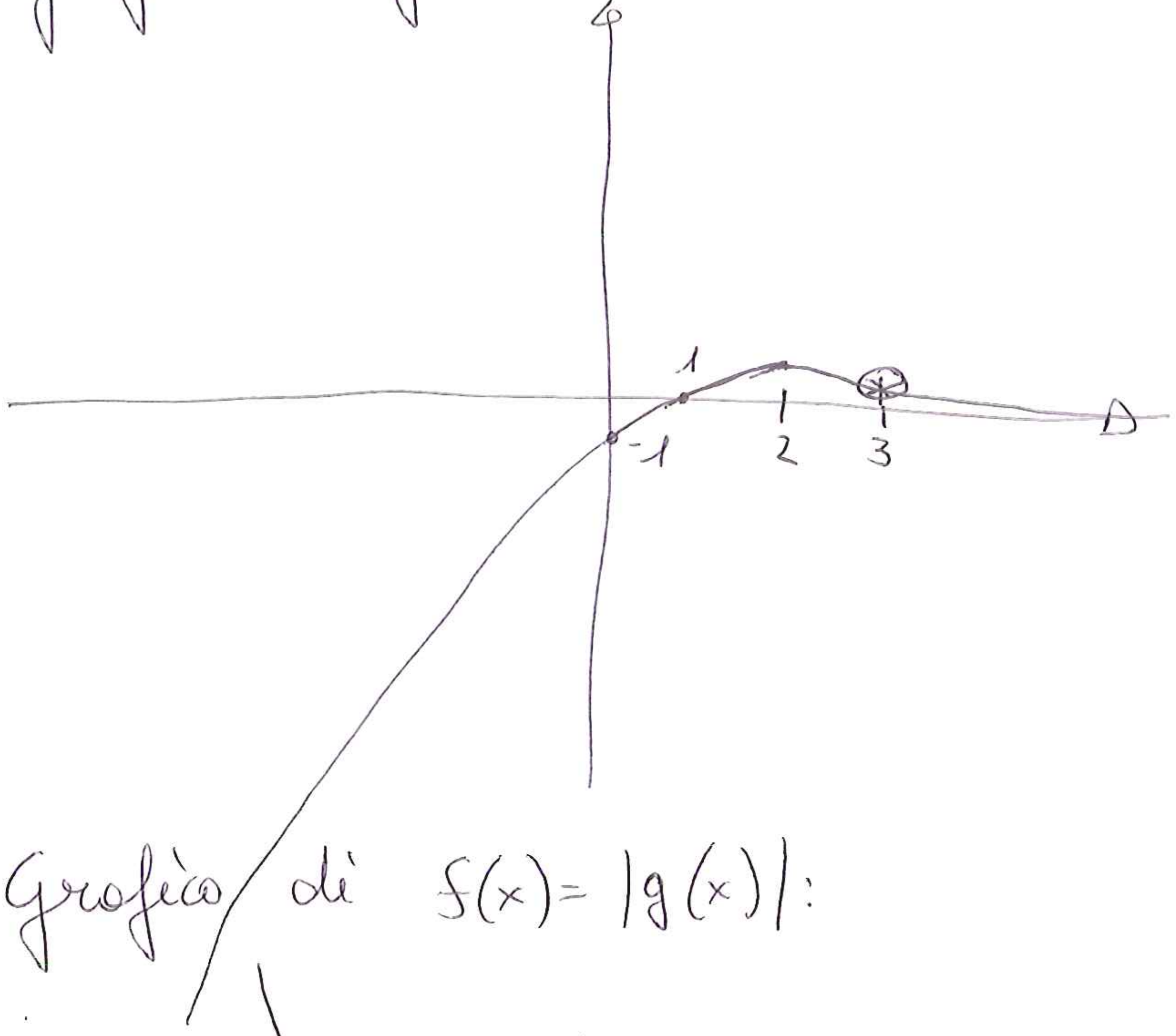
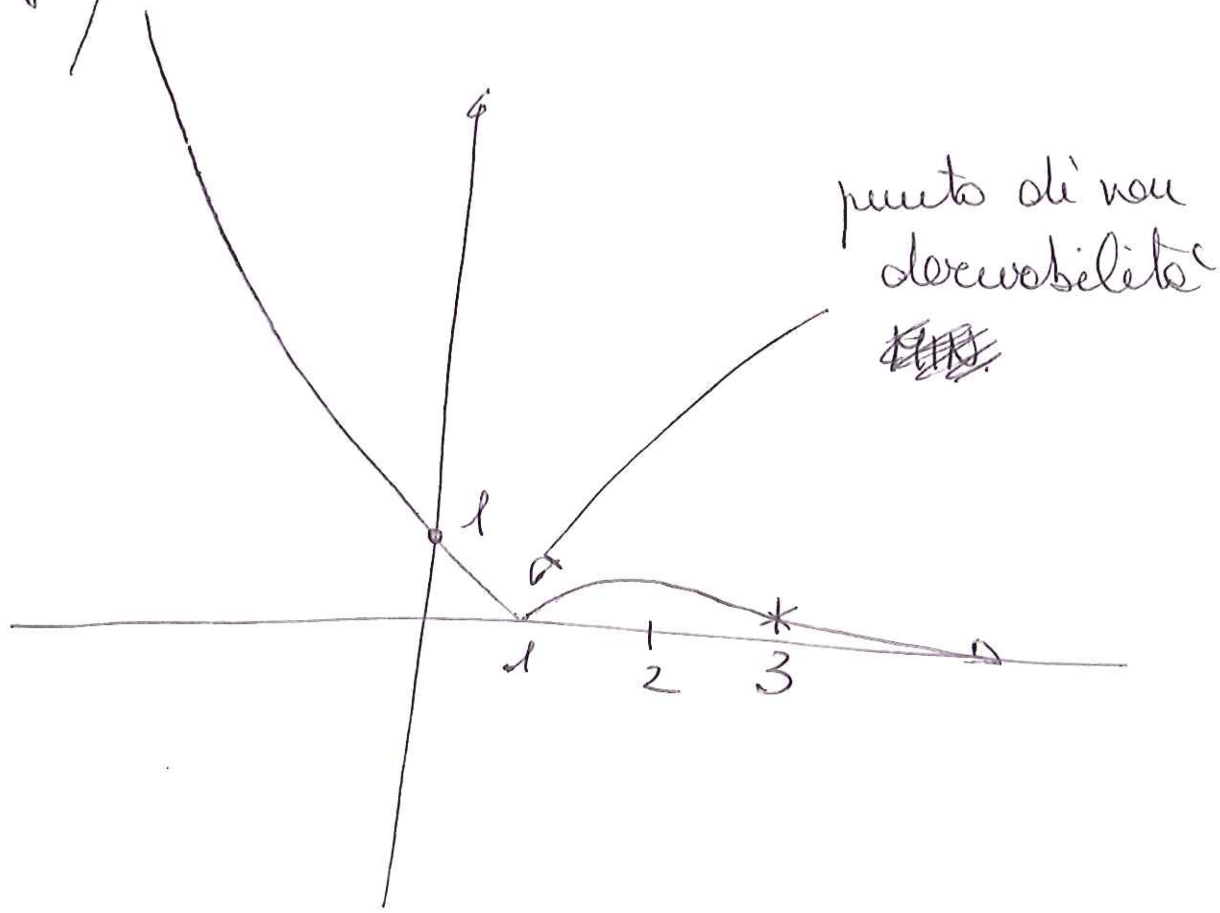


Grafico di $f(x) = |g(x)|$:



In $(-\infty, 0]$: $\boxed{B_S}$

MIN. REL. e ASS. in $x=0$: $f(0)=1$

$\nexists$ MAX. REL. e ASS.

5) $z \neq 1+2i$

$$(z-1)^2-(2i)^2=2z-3$$

$$z^2-2z+1+4-2z+3=0$$

$$z^2-4z+8=0$$

$$z_{1,2}=2\pm\sqrt{4-8}=2\pm 2i=2\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i\right]$$

$$\Rightarrow z_1=2\sqrt{2}\left[\cos\left(+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(+\frac{\pi}{4}\right)\right]=2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_2=2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=2\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$$