C.D. PAGANI, S. SALSA – ANALISI MATEMATICA - vol. 1 - MASSON

Sia ora $f \in \mathcal{R}(a,b)$ e sia $c \in [a,b]$; se x è un altro punto qualsiasi di $[a,b]$ la funzione f è certo integrabile sull'intervallo $[c,x]$; poniamo

$$F(x) := \int_c^x f(t)dt \tag{1.22}$$

La (1.22) chiaramente definisce una funzione $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, che chiameremo **funzione integrale** di f (relativa al punto c).

▪ **Teorema 1.10** - (teorema fondamentale del Calcolo integrale). *Sia $f \in C^0([a,b])$ e sia $c \in [a,b]$; allora la funzione integrale F* (definita dalla (1.22)) *è di classe $C^1([a,b])$ e si ha : $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$.*

Dimostrazione - Sia $x \in [a,b]$ e h un incremento abbastanza piccolo in modo che anche $x+h \in [a,b]$; si ha (usando la (1.21)):

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_c^{x+h} f(t)dt - \int_c^x f(t)dt = \\ &= \int_x^c f(t)dt + \int_c^{x+h} f(t)dt = \\ &= \int_x^{x+h} f(t)dt = hf(\xi) \end{aligned}$$

essendo ξ un punto dell'intervallo $[x, x+h]$: nell'ultimo passaggio si è fatto uso della proprietà della media (4 *ii*) del teorema 1.8). Osserviamo ora che, quando $h \to 0$, ξ tende al punto x; allora $f(\xi)$ (essendo f continua) tende a $f(x)$; abbiamo allora:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(\xi) = f(x)$$

che prova la tesi. □

Il teorema 1.10 mostra che *ogni funzione integrale di una funzione continua f è una* **primitiva** *di f*; poiché sappiamo (vedi 6.2.3) che due primitive di una stessa funzione differiscono tra loro per una costante, ne segue che *l'insieme di tutte le primitive di una funzione f continua su I è dato dall'espressione*

$$\int_c^x f(t)dt + k \tag{1.23}$$

dove c è un punto fissato di I e k è una costante arbitraria.

Sottolineiamo che sotto la sola ipotesi di integrabilità, non si può affermare che F è derivabile; ad esempio, se $f(x) = \operatorname{sgn} x$, allora $F(x) = \int_0^x f(t)dt = |x|$, non derivabile nell'origine. Osserviamo tuttavia che F è continua (v. esercizio 8).

La famiglia di tutte le primitive di una funzione assegnata prende il nome di **integrale indefinito**. Il simbolo $\int f(x)dx$ viene indifferentemente usato per indicare la famiglia di tutte le primitive di $f(x)$ oppure una qualsiasi di esse.

Le precedenti osservazioni giustificano l'affermazione, impropria ma suggestiva: l'integrazione è l'operazione inversa della derivazione. (Lo studente noterà che la derivazione, essendo un'operazione non iniettiva (infatti se f è derivabile, f e $f+$ costante hanno la stessa derivata!) non è invertibile).

Il seguente corollario del teorema 1.10 è della massima utilità.

Corollario 1.11 - *Sia f continua su $[a,b]$ e sia G una primitiva di f. Allora risulta*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)\,. \tag{1.24}$$

Dimostrazione - Se G è una primitiva di f, esiste una costante k per cui risulta

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt + k$$

(si è preso $c = a$ nella (1.23)). Ponendo, nella formula precedente, $x = a$ si trova $G(a) = k$; si ha perciò

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt + G(a)$$

Ponendo in questa $x = b$ si ottiene la (1.24). □

Basterà dunque conoscere una primitiva di f (funzione continua su $[a,b]$) per poter calcolare immediatamente l'integrale definito di f tra a e b.

L'espressione $G(b) - G(a)$, cioè l'incremento di G nel passare da a a b, viene solitamente indicato con una delle notazioni seguenti:

$$[G(x)]_a^b \quad , \quad G(x)\,|_a^b\,.$$

***Esempio* 1.4** - Poiché $\log x$, $0 < a \le x \le b$, è una primitiva di $1/x$ in $[a,b]$ si trova subito

$$\int_a^b \frac{1}{x}dx = \log b - \log a$$

come avevamo già trovato nell'esempio 1.3, con un po' di calcoli.

Dalla tabella di derivate in 6.1.4 si ricava subito la tabella di primitive riportata a pagina seguente.

Come abbiamo già osservato in 6.1.4 tutte le funzioni elementari sono derivabili (in ogni punto dell'insieme di definizione) e la derivata è ancora una funzione elementare; inoltre, essendo continue, le funzioni elementari ammettono primitive. Ci si può chiedere se anche le primitive delle funzioni elementari sono ancora funzioni