SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI 1 del 9/2/2026

A_1

COMPITO A

1) $$a_n > a_{n+1} \iff \frac{n^2+n+2}{\underbrace{n^2+3}_{>0}} > \frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{\underbrace{(n+1)^2+3}_{>0}}$$

$$\iff [n^2+2n+4](n^2+n+2) > [n^2+3n+4](n^2+3)$$

$$\iff \cancel{n^4}+\cancel{3n^3}+8n^2+8n+8 > \cancel{n^4+6n^3+13n^2}$$
$$\cancel{n^4}+\cancel{3n^3}+7n^2+9n+12$$

$$\iff \cancel{3n^2+n+4<0} \quad n^2-n-4>0$$

$x^2-x-4=0$ ha soluzioni $$x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1+16}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$$

Pertanto a_n decresce $\forall n > \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ (un po' più grande di $\frac{5}{2}$).

Infatti, $a_0 = \frac{2}{3} < a_1 = 1 < a_2 = \frac{8}{7} > a_3 = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$.

Poiché $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$, allora

$$b_n = n^\alpha a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha<0 \\ 1 & \text{se } \alpha=0 \\ +\infty & \text{se } \alpha>0 \end{cases}$$

Similmente,

$$\sum b_n \begin{cases} \text{converge se } \alpha<-1 \\ \text{diverge se } \alpha\geq-1 \end{cases}$$

2) f è definita in tutto $\mathbb{R}$ ed è ivi continua.

Intersezioni: asse y: $f(0)=1$

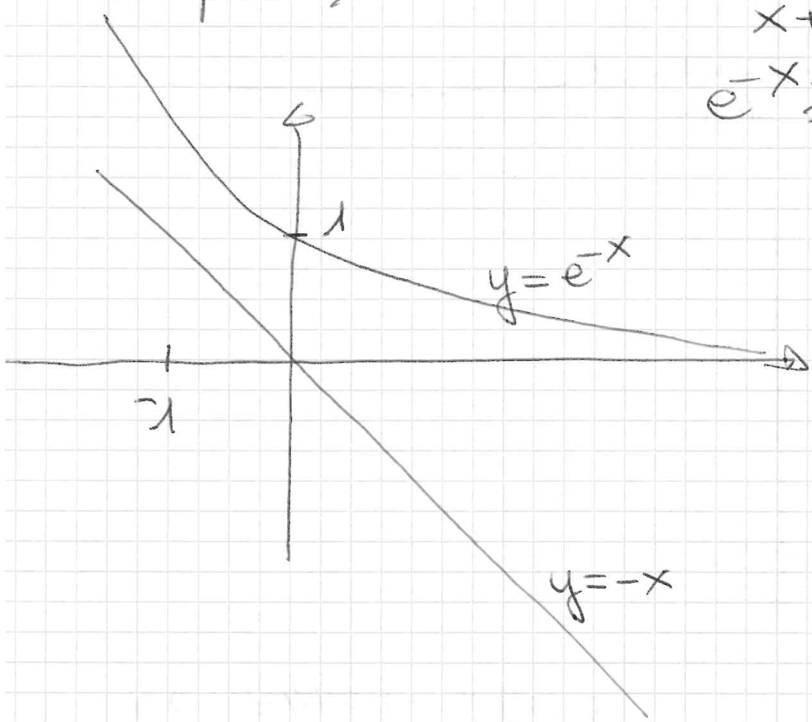
~~asse x~~

$$f(x)=\begin{cases} x+e^{x}>0 & \text{per } x\geq 0 \\ x+e^{-x} & \text{per } x<0 \end{cases}$$

Il grafico di f può intersecare l'asse delle x solo per $x<0$

$x+e^{-x}\geq 0 \iff$

$e^{-x}\geq -x$



$\Rightarrow f$ sempre positiva.

Non ci sono intersezioni con l'asse x.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$. La funzione è superlineare quindi $\nexists$ asintoto obliquo, né a $+\infty$, né a $-\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=+\infty$

$$f'(x)=\begin{cases} 1+e^{x}>0 & \text{per } x>0 \\ 1-e^{-x} & \text{per } x<0. \end{cases}$$

Per $x<0$ $\quad f'(x)\geq 0 \iff e^{-x}\leq 1 \iff x\geq 0$

$\Rightarrow f$ è sempre decrescente in $(-\infty,0)$ e sempre crescente in $(0,+\infty)$.

Essendo illimitata superiormente, $\nexists$ MAX.

$x=0$ è punto di MIN. ASS. $f(0)=1$.

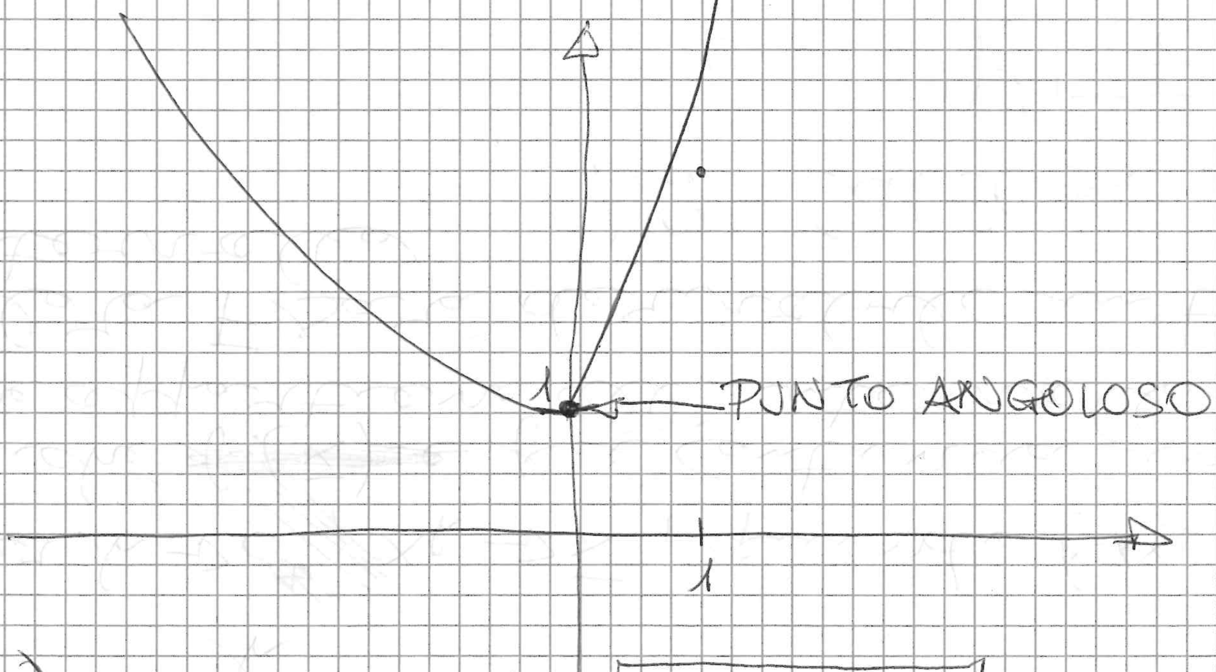
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 2 \neq \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

In $x=0$ punto angoloso.

ANCHE SE NON RICHIESTO, completiamo il grafico:

$$f''(x) = \begin{cases} e^x > 0 & \text{per } x>0 \\ e^{-x} > 0 & \text{per } x<0. \end{cases}$$

Osservando il grafico, possiamo concludere che f è convessa in tutto $\mathbb{R}$, nonostante il punto di non derivabilità in $x=0$.



3)
$$z_{1,2} = \frac{-(i+\sqrt{3}) + \sqrt{(i+\sqrt{3})^2 - 4}}{2} =$$

$$= \frac{-(i+\sqrt{3}) + \sqrt{-1+3+2\sqrt{3}i-4}}{2} = \frac{-(i+\sqrt{3}) + \sqrt{-2+2\sqrt{3}i}}{2}$$

A4

$$w_{1,2} = \sqrt{-2+2\sqrt{3}i} = \sqrt{4\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$$

$$= 2\left[\sqrt{\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)}\right]$$

$$= \pm 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \pm 2\left[\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$$

$$= \pm\left(1+\sqrt{3}i\right)$$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{-(i+\sqrt{3}) \pm (1+\sqrt{3}i)}{2} = \begin{cases} \dfrac{-i-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}i}{2} \\[2ex] \dfrac{-i-\sqrt{3}-1-\sqrt{3}i}{2} \end{cases}$$

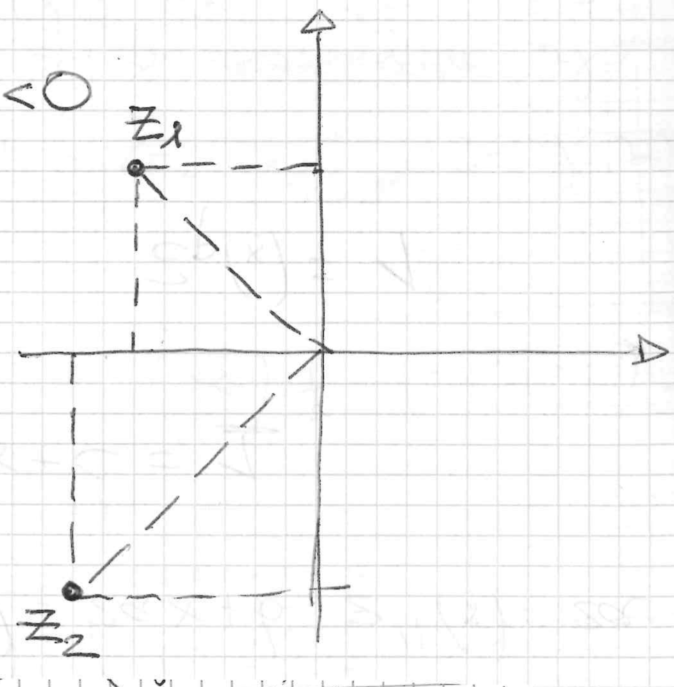
$$z_1 = \frac{(1-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)i}{2} = \frac{(1-\sqrt{3})}{2}(1-i) \quad ; \quad z_2 = \frac{-(\sqrt{3}+1)-i(1+\sqrt{3})}{2} = \frac{-(\sqrt{3}+1)}{2}(1+i)$$

$$|z_1| = \frac{(\sqrt{3}-1)}{2}\sqrt{2} = \frac{(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{Re}(z_1) = -\mathrm{Im}(z_1) = \frac{-(\sqrt{3}-1)}{2} < 0$$

$$|z_2| = \frac{(\sqrt{3}+1)}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{Re}(z_2) = \mathrm{Im}(z_2) < 0$$



4) Equazione a variabili separabili:

$$a(x) = x^2 e^x \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$$b(y) = e^{-y} \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$\exists!$ soluzione locale. $\quad b(y) \neq 0 \quad \forall y$

$\Rightarrow \nexists$ sol. singolari.

Separiamo le variabili:

$$\int e^y dy = \int x^2 e^x dx$$

(A5)

$$e^y = \left[x^2 e^x - \int 2x e^x dx\right]$$

$$= x^2 e^x - 2\left[x e^x - \int e^x dx\right]$$

$$= (x^2 - 2x + 2)e^x + C$$

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow 1 = +2 + C \quad \Rightarrow C = -1$$

$$\boxed{\Rightarrow y = \ln\left[(x^2 - 2x + 2)e^x - 1\right]}$$

5) Per $x \to 0$

$$f(x) = \frac{\cancel{x} + \frac{x^3}{6} - \left[\cancel{x} - \frac{x^3}{3}\right] + x^3 + o(x^3)}{x^4 + o(x^4)}$$

$$\underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{x^3\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + 1\right)}{x^4} = \frac{3}{2x}$$

La funzione $g(x) = \frac{1}{x}$ non è integrabile in $(0,1]$. Pertanto f non è integrabile in $(0,1]$