COMPITO B

B1

1) Equazione lineare.

$a(x) = -1 \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

$f(x) = \cos x \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \exists!$ sol. globale in $\mathbb{R}$.

$$y(x) = e^{\int_0^x 1\,dt}\left[1 + \int_0^x e^{-\int_0^t ds} \cos t\, dt\right]$$

$$= e^{x}\left[1 + \int_0^x e^{-t} \cos t\, dt\right]$$

$$\int_0^x e^{-t}\cos t\, dt = e^{-t}\sin t\Big|_0^x + \int_0^x e^{-t}\sin t\, dt$$

$$= e^{-x}\sin x - e^{-t}\cos t\Big|_0^x - \int_0^x e^{-t}\cos t\, dt$$

$$\Rightarrow \int_0^x e^{-t}\cos t\, dt = \frac{1}{2}\left[e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x + 1\right]$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{x}\left[1 + \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}\right]$$

$$= e^{x}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x)\right)$$

$$= \frac{3}{2}e^{x} + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$$

2) $$f(x) = \frac{-x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} - 1 + \left(1 + \cancel{x^2} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}\right) + o(x^6)}{\left[\cancel{x} + \frac{x^3}{6} - \cancel{x} + o(x^3)\right]^2 (x + o(x))}$$

B_2

$$\underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)x^6}{\frac{x^6}{36} \cdot x} = -\frac{6}{x}$$

Poiché la funzione $g(x) = \frac{1}{x}$ non è integrabile in $(0,1]$, allora f non è integrabile in $(0,1]$.

3) $$a_n = \left(\frac{n^3-2+1}{n^3-2}\right)^{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n^3+2}\right)^{n^2}$$

$$= \left[\left(1 + \frac{1}{n^3+2}\right)^{n^3+2}\right]^{\frac{n^2}{n^3+2}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = e^{\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n^3+2}} = e^0 = 1$$

Poiché $a_n \underset{n \to +\infty}{\not\to} 0$, allora la serie, a termini positivi, diverge.

4) $I_{def} = \{x \neq 1\}$.

Intersezione con gli assi: $f(0) = -2$ (con asse y)

$f(x) = 0 \iff x = 2$ (con asse x).

~~Poiché~~ $f(x) > 0 \iff x - 1 > 0 \iff x > 1$

f è negativa in $(-\infty, 1)$ e non negativa in $(1, +\infty)$.
Si annulla in $x = 2$.

$\boxed{B_3}$

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} f(x) = \frac{1}{0^{\pm}} e = \pm\infty$$

Asintoto verticale $x=1$ da DX e da SX.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x-1} e^x & \text{se } x \geq 2 \\[2ex] \dfrac{2-x}{x-1} e^x & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$ Andamento superlineare $\Rightarrow$ NO asintoto obliquo

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-e^x) = 0^-$$ asintoto orizzontale $y=0$ per $x \to -\infty$.

$$f'(x) = \left[\frac{(x-2+1)e^x(x-1) - (x-2)e^x}{(x-1)^2}\right] \quad \text{per } x>2$$

$$= \frac{[(x-1)^2 - (x-2)]}{(x-1)^2} e^x = \frac{(x^2-3x+3)}{(x-1)^2} e^x > 0$$

$\forall x > 2$ in quanto $\Delta < 0$

$$f'(x) = \frac{-(x^2-3x+3)}{(x-1)^2} e^x < 0 \text{ per } x<2 \ ; \ x \neq 1$$

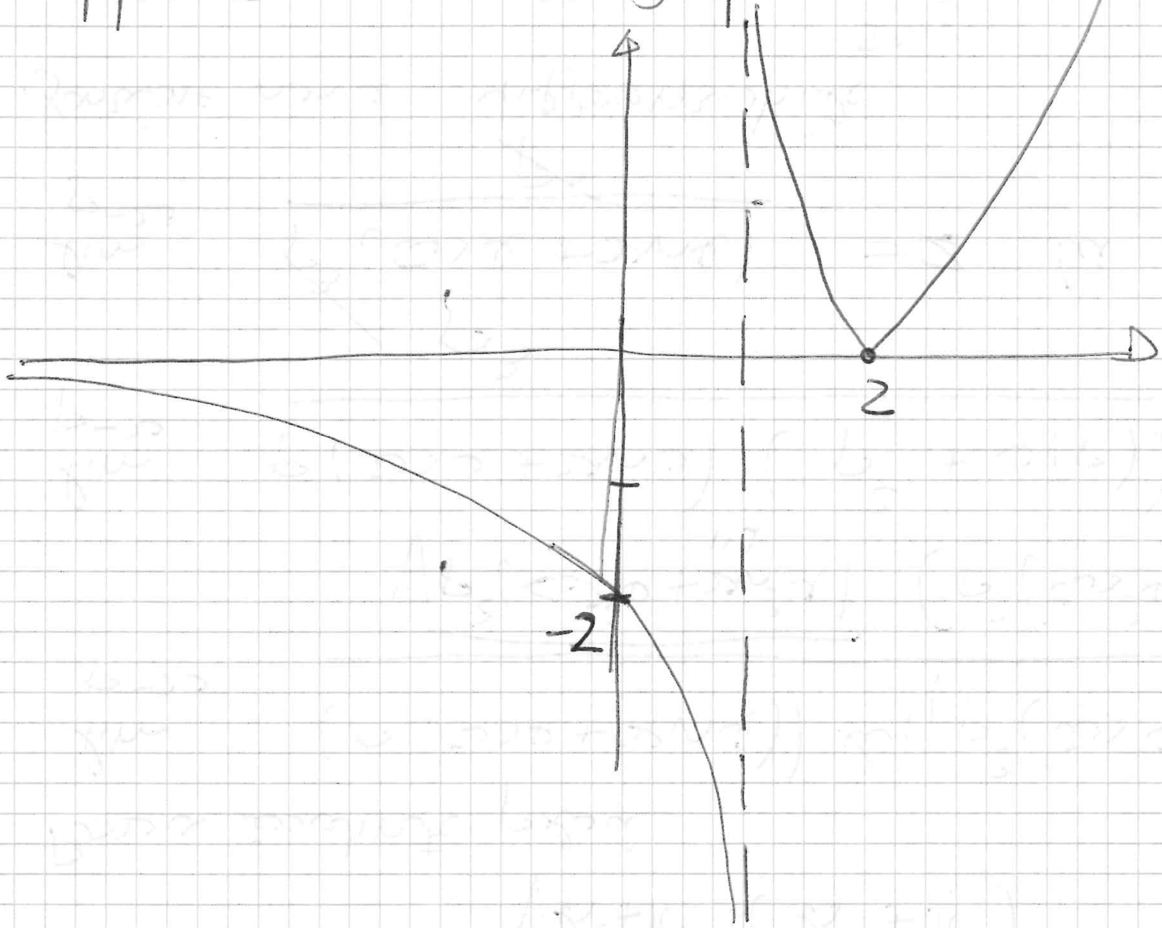
Quindi f decresce in $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$ e cresce in $(2, +\infty)$.

B_4

$x=2$ punto di MIN. REL.

Poiché f è illimitata, allora $\nexists$ MAX. e MIN. ASS.

Poiché $\lim_{x\to 2^{\pm}} f'(x) = \pm e^2$, abbiamo un punto angoloso in $x=2$. Supponendo un numero minimo di flesso, un grafico (NON RICHIESTO) approssimativo di f può essere



5) $$\frac{(z+i)(\bar z+i)+(2\bar z-i)(z-i)-3(z-i)(\bar z+i)}{(z-i)(\bar z+i)}=0$$

$z\neq i$; $\bar z\neq -i$ $\Rightarrow$ $\boxed{z\neq i}$

$$\cancel{z(\bar z+i)(\bar z}\; z\cdot\bar z+i(z+\bar z)-1+2|z|^2-2i\bar z$$
$$-iz-1-3\left(|z|^2+i(z-\bar z)+1\right)=0$$

B5

$$\cancel{|z|^2} + \cancel{iz} + i\bar{z} - 1 + \cancel{2|z|^2} - 2i\bar{z} - \cancel{iz} - 1$$

$$\cancel{-3|z|^2} - 3iz + 3i\bar{z} - 3 = 0$$

$$2i\bar{z} - 5 - 3iz = 0$$

$$2i(x - iy) - 5 - 3i(x + iy) = 0$$

$$\begin{cases} 2y - 5 + 3y = 0 \\ 2x - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Ma $z = i$ è esclusa come soluzione

$\Rightarrow$ NESSUNA SOLUZIONE.