COMPITO C

G

1) f è definita in tutto $\mathbb{R}$ ed è ivi continua.

~~Intersezioni con asse~~

$$f(x) = \begin{cases} x + e^{-x} > 0 & \text{se } x \geq 0 \\ -x + e^{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Intersezioni con assi:

Intersezioni con assi:

Asse y: $f(0) = 1$

Asse x: $f(x) = |x| + e^{-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

quindi non abbiamo intersezioni e la funzione è sempre strettamente positiva

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

Si osservi che, per $x \to +\infty$, $f(x) = x + o(1)$.

$\Rightarrow$ ASINTOTO OBLIQUO $y = x$ per $x \to +\infty$.

Infatti: $$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{xe^{x}}\right) = 1$$

$$q = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} [\cancel{x} + e^{-x} - \cancel{x}] = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$$ Andamento superlineare $\Rightarrow$ NO AS. OBLIQUO per $x \to -\infty$.

$$f'(x) = \begin{cases} 1-e^{-x} & \text{se } x>0 \\ -1-e^{-x}<0 & \text{se } x<0 \end{cases}$$

Per $x>0$: $f'(x) \geq 0 \iff 1-e^{-x} \geq 0$

$\iff e^{-x} \leq 1 \iff x \geq 0$

Quindi f decresce in $(-\infty, 0)$ e cresce in $(0, +\infty)$. $x=0$ punto di MIN. ASS.

$f(0) = 1$.

Essendo illimitato superiormente, $\nexists$ MAX. ASS.

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0$; $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -2$

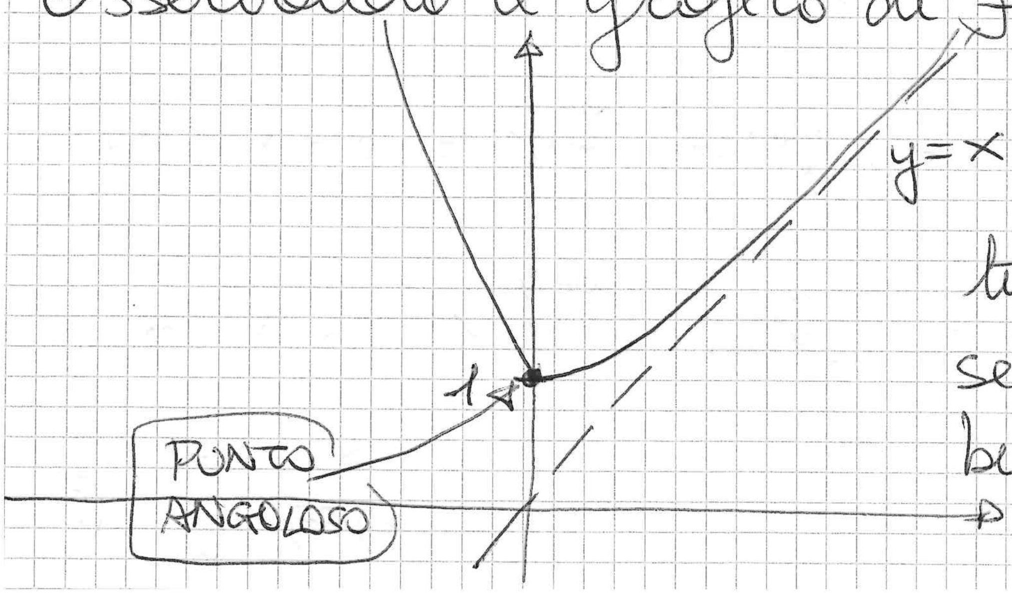
In $x=0$ punto angoloso.

ANCHE SE NON RICHIESTO, disegniamo il grafico di f.

$$f''(x) = \begin{cases} e^{-x}>0 & \text{se } x>0 \\ e^{-x}>0 & \text{se } x<0 \end{cases}$$

f convessa in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$.

Osservando il grafico di f, si deduce



che f è convessa in tutto $\mathbb{R}$, anche se non è derivabile in $x=0$.

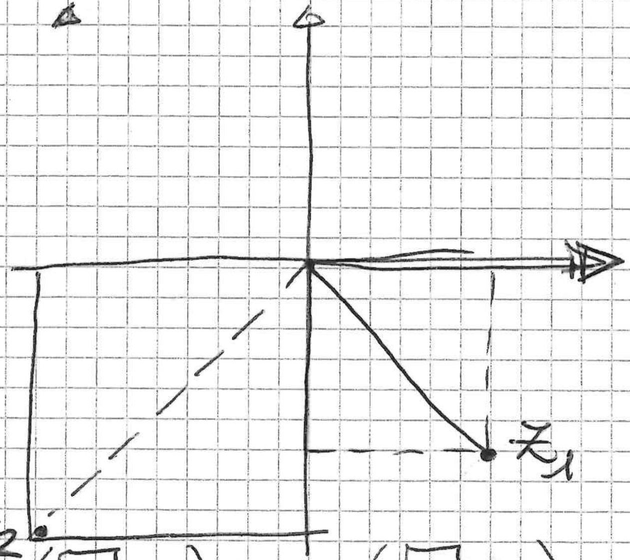
C3

2) $$z_{1,2}=\frac{-(i\sqrt{3}+1)+\sqrt{(i\sqrt{3}+1)^2+4}}{2}$$

$$w_{1,2}=\sqrt{(i\sqrt{3}+1)^2+4}=\sqrt{-3+1+2i\sqrt{3}+4}$$
$$=\sqrt{2+2i\sqrt{3}}=\sqrt{4\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}$$
$$=2\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\pm 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$=\pm 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\pm(\sqrt{3}+i)$$

$$\Rightarrow\quad z_{1,2}=\frac{-(i\sqrt{3}+1)\pm(\sqrt{3}+i)}{2}=\begin{cases}\dfrac{-1+\sqrt{3}+i(1-\sqrt{3})}{2}\\[2ex]\dfrac{-1-\sqrt{3}-i\sqrt{3}-i}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad z_1=\frac{(\sqrt{3}-1)}{2}(1-i)\quad;\quad z_2=\frac{-(1+\sqrt{3})}{2}(1+i)$$



$$|z_1|=\frac{(\sqrt{3}-1)}{2}\sqrt{2}=\frac{(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}}\qquad |z_2|=\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}\sqrt{2}$$
$$=\frac{(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}}$$

$$\underbrace{Re(z_1)}_{>0}=-\underbrace{Im(z_1)}_{<0}$$

$$Re(z_2)=Im(z_2)<0$$

3) Equazione a variabili separabili

C_4

$a(x)=x^2e^{-x}\in C^\infty(\mathbb{R})$

$b(y)=e^{-y}\in C^\infty(\mathbb{R})$ $\Rightarrow \exists!$ sol. LOCALE.

$b(y)\neq 0 \quad \forall y\in\mathbb{R} \Rightarrow$ NO sol. singolari

Procediamo per separazione delle variabili

$$\int e^y dy=\int x^2e^{-x}dx$$

$$e^y=-x^2e^{-x}+\int 2xe^{-x}dx$$

$$=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}+2\int e^{-x}dx$$

$$=-(x^2+2x+2)e^{-x}+C$$

$y(0)=0 \Rightarrow 1=-2+C \Rightarrow C=3$

$$\Rightarrow e^y=-(x^2+2x+2)e^{-x}+3$$

$$\Rightarrow \underline{y=\ln\left[3-(x^2+2x+2)e^{-x}\right]}$$

4)

$$f(x)=\frac{\cancel{x}-\frac{x^3}{6}-\cancel{x}-\frac{x^3}{3}+2x^3+o(x^3)}{x^3\left[x+o(x)\right]}$$

$$\sim\frac{\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}+2\right)x^3}{x^4}=+\frac{9}{6x}=+\frac{3}{2x}$$

Poiché $g(x)=\frac{1}{x}$ non è integrabile in $(0,1]$, f NON è integrabile in $(0,1]$.

C5

5) $$a_n > a_{n+1} \iff \frac{n^2+2n+1}{\underbrace{n^2+3}_{>0}} > \frac{(n+1)^2+2(n+1)+1}{\underbrace{(n+1)^2+3}_{>0}}$$

$$\iff (n^2+2n+1)\left[n^2+2n+4\right] > \left[n+1+1\right]^2(n^2+3)$$

$$\iff \begin{aligned} n^4+2n^3+4n^2&+\\ +2n^3+4n^2+8n&+\\ +n^2+2n+4& \end{aligned} > (n^2+4n+4)(n^2+3)$$

$$\iff \cancel{n^4}\cancel{+4n^3}+9n^2+10n+4 > \cancel{n^4}\cancel{+4n^3}+4n^2+3n^2+12n+12$$

$$\iff 2n^2-2n-8>0 \iff n^2-n-4>0$$

L'equazione $x^2-x-4=0$ ammette come soluzioni $$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+16}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}.$$

Pertanto la successione decresce $\forall n > \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ (un po' più grande di $\frac{5}{2}$).

Infatti, $a_0=\frac{1}{3} < a_1=1 < a_2=\frac{9}{7} < a_3=\frac{4}{3} > a_4=\frac{25}{19}$.

Poiché $\lim_{n\to+\infty} a_n=1 \Rightarrow b_n\cdot n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} n^\alpha$.

Pertanto,
$$b_n \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha<0 \\ 1 & \text{se } \alpha=0 \\ +\infty & \text{se } \alpha>0 \end{cases}$$

$$\sum b_n \begin{cases} \text{converge} & \forall \alpha < -1 \\ \text{diverge} & \forall \alpha \geq -1 \end{cases}.$$

C6