COMPITO D

1)
$$f(x)=\frac{\cancel{x^2}-\cancel{\frac{x^4}{2}}+\frac{x^6}{3}+1-\cancel{x^2}+\cancel{\frac{x^4}{2}}-\frac{x^6}{6}+o(x^6)}{\left[\cancel{x}-\cancel{x}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]^2(x+o(x))}$$

$$\underset{x\to 0^+}{\sim}\frac{x^6\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)}{\frac{x^7}{36}}=\frac{36}{6x}=\frac{6}{x}$$

Poichè $g(x)=\frac{1}{x}$ non è integrabile in $(0,1]$, allora f NON è integrabile in $(0,1]$.

2)
$$a_n=\left(\frac{n^3+2+1}{n^3+2}\right)^{n^2}=\left(1+\frac{1}{n^3+2}\right)^{n^2}$$

$$=\left[\left(1+\frac{1}{n^3+2}\right)^{n^3+2}\right]^{\frac{n^2}{n^3+2}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=e^{\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^3+2}}=e^0=1$$

Poichè $\lim_{n\to+\infty}a_n\neq 0$, la serie, a termini positivi, diverge.

3) $I_{def}=\{x\neq -2\}$

Intersezioni con gli assi:

asse y: $f(0)=\frac{1}{2}$; asse x: $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$.

D2

$f(x) > 0 \iff x+2>0 \iff x>-2$

f è negativa in $(-\infty,-2)$ ed è non negativa in $(-2,+\infty)$. Si annulla in $x=-1$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x+2}\, e^x & \text{se } x \geq -1 \\ -\dfrac{(x+1)}{x+2}\, e^x & \text{se } x < -1;\ x \neq -2 \end{cases}$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ andamento superlineare $\Rightarrow$ NO asintoto obliquo.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^-$ AS. ORIZZONTALE a $-\infty$: $y=0$.

Per $x>-1$

$$f'(x) = \frac{(x+2)e^x(x+2)-(x+1)e^x}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{[x^2+4x+4-x-1]e^x}{(x+2)^2} = \frac{(x^2+3x+3)e^x}{(x+2)^2} > 0 \quad \forall x>-1$$

poiché $\Delta < 0$

$\Rightarrow$ per $x<-1$ $\quad f'(x) = \dfrac{-(x^2+3x+3)e^x}{(x+2)^2} < 0 \quad \forall x<-1;\ x\neq-2$

f decresce in $(-\infty,-2)\cup(-2,-1)$ e cresce in $(-1,+\infty)$.

$x=-1$ è punto di MIN. REL.: $f(-1)=0$. P3

~~Poiché f~~ $\lim_{x\to -2^{\pm}} f(x)=\frac{1}{0^{\pm}}=\pm\infty$

ASINTOTO VERTICALE $x=-2$ DA DX e DA SX.

Poiché f è illimitata, $\nexists$ MAX. e MIN. ASS.

$$\lim_{x\to -1^{+}} f'(x)=e^{-1}\neq \lim_{x\to -1^{-}} f'(x)=-e^{-1}$$

$\Rightarrow$ In $x=-1$ punto angoloso.

ANCHE SE NON RICHIESTO, calcoliamo la derivata seconda. Per $x>-1$:

$$f''(x)=\frac{(2x+3+x^2+3x+3)e^x(x+2)^{\cancel{2}}-(x^2+3x+3)e^x\,2\cancel{(x+2)}}{(x+2)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$=\frac{e^x}{(x+2)^3}\left[(x^2+5x+6)(x+2)-2x^2-6x-6\right]$$

$$=\frac{e^x}{(x+2)^3}\left[x^3+\cancel{2x^2}+5x^2+10x+\cancel{6x}+12-\cancel{2x^2}-\cancel{6x}-6\right]$$

$$=\frac{e^x}{(x+2)^3}\underbrace{(x^3+5x^2+10x+6)}_{\text{divisibile per } x+1}$$

$$=\frac{e^x}{(x+2)^3}(x+1)\underbrace{(x^2+4x+6)}_{>0}>0 \iff \frac{x+1}{x+2}>0$$

sempre vero per $x>-1$

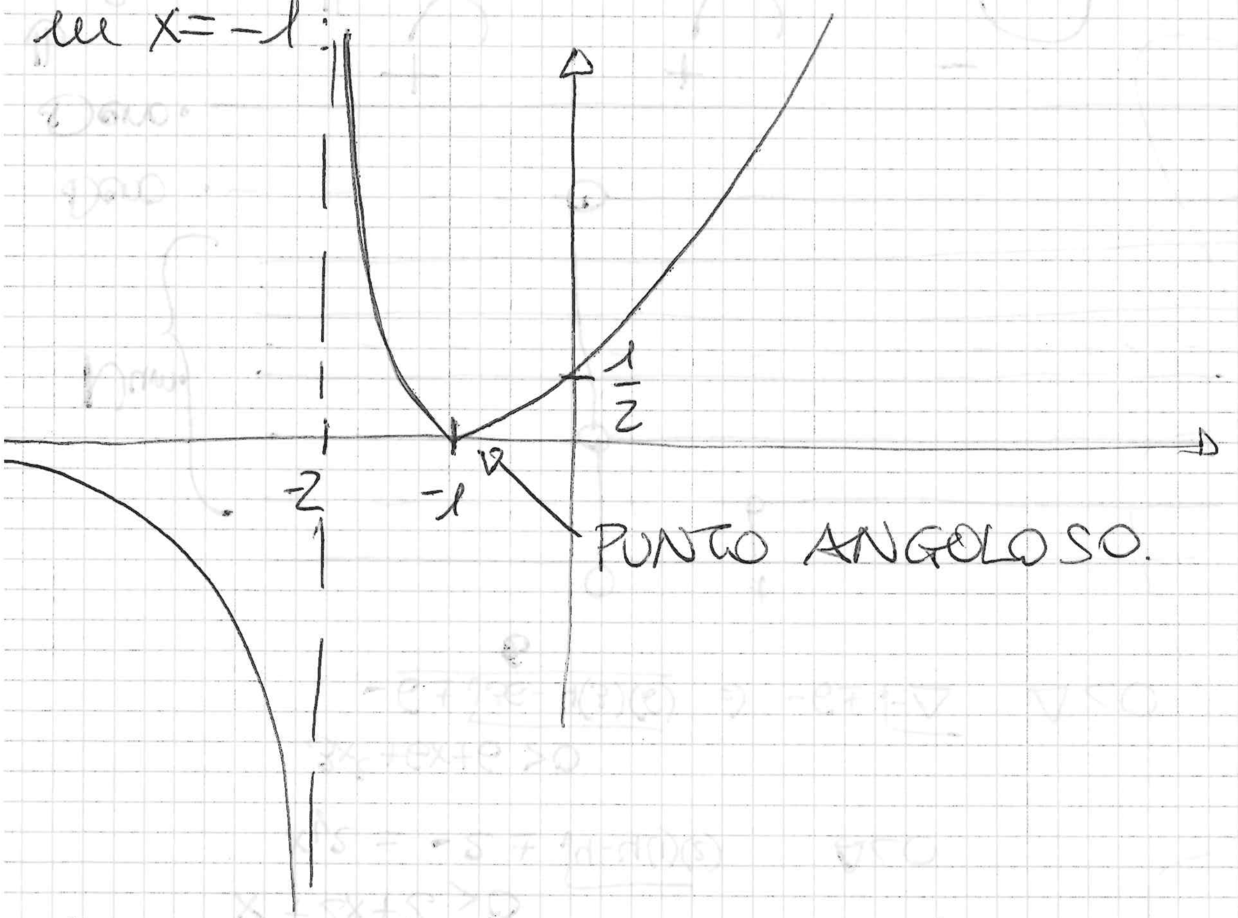
Per $x<-1$; $x\neq -2$ D4

$$f''(x)=\frac{-e^x}{(x+2)^3}(x+1)(x^2+4x+6)>0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x+1}{x+2}<0 \quad \Leftrightarrow -2<x<-1$$

Quindi f è concava in $(-\infty,-2)$; convessa in $(-2,-1)$ e in $(-1,+\infty)$.

Dal grafico si può osservare che f è convessa in tutto $(-2,+\infty)$, anche se non è derivabile in $x=-1$:



4) $$\frac{(\bar{z}-i)(z-i)+(2z+i)(\bar{z}+i)-3(\bar{z}+i)(z-i)}{(\bar{z}+i)(z-i)}=0$$

$$\bar{z}\neq -i\ ;\ z\neq i \Rightarrow z\neq i.$$

$$\cancel{|z|^2} \cancel{-i\bar{z}} - iz - 1 + \cancel{2|z|^2} + 2zi \cancel{+i\bar{z}} - 1$$ P5

$$-3(\cancel{|z|^2} - i\bar{z} + iz + 1) = 0$$

$$-iz - 1 + 2iz - 1 + 3i\bar{z} - 3iz - 3 = 0$$

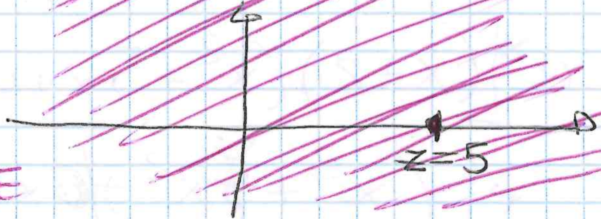
$$-2iz + 3i\bar{z} - 5 = 0$$

$$-2i(x+iy) + 3i(x-iy) - 5 = 0$$

$$\begin{cases} 2y + 3y = \cancel{0}\ 5 \\ -2x + 3x \cancel{-5} = 0 \end{cases} \quad \cancel{\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow z = 5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$ Ma $z \neq i$

$\Rightarrow$ NESSUNA SOLUZIONE



5) $a(x) = -1 \in C^\infty(\mathbb{R})$ Equazione lineare del

$f(x) = \operatorname{sen} x \in C^\infty(\mathbb{R})$ 1° ordine $\Rightarrow \exists!$ soluzione (globale) in tutto $\mathbb{R}$

$$y(x) = e^{\int_0^x dt}\left[-1 + \int_0^x e^{-\int_0^t ds} \operatorname{sen}(t)\,dt\right]$$

$$= e^x\left[-1 + \int_0^x e^{-t} \operatorname{sen} t\,dt\right]$$

$$\int_0^x e^{-t} \operatorname{sen} t\,dt = -e^{-t}\cos t\Big|_0^x - \int_0^x e^{-t}\cos t\,dt$$

$$= -e^{-x}\cos x + 1 - \left[e^{-t}\operatorname{sen} t\Big|_0^x + \int_0^x e^{-t}\operatorname{sen} t\,dt\right]$$

$$\int_0^x e^{-t}\sin t\,dt = -e^{-x}\cos x + 1 - e^{-x}\sin x - \int_0^x e^{-t}\sin t\,dt$$

D_6

$$\Rightarrow \int_0^x e^{-t}\sin t\,dt = \frac{1}{2}\left[1 - e^{-x}(\cos x + \sin x)\right]$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = e^x\left[-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}(\cos x + \sin x).$$