COMPITO C

1) In forma normale:

$$y' + \frac{2}{x} y(x) = \frac{\arcsin x}{x^2}$$

L'equazione è definita per $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \in [-1,1] \end{cases}$

cioè per $x \in [-1,0) \cup (0,1]$.

Pertanto il Problema di Cauchy è definito in $(0,1]$.

$a(x) = \frac{2}{x} \in C^{\infty}(0,1]$; $f(x) = \frac{\arcsin x}{x^2} \in C^0(0,1]$

quindi la soluzione esiste (globalmente) ed è unica: $y \in C^1(0,1]$.

Si può determinare la soluzione con la formula risolutiva, oppure riscrivendo l'equazione nella forma

$$(x^2 y)' = \arcsin x$$

da cui

$$x^2 y(x) = \int \arcsin x \, dx + C$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{x^2}\Big[\underbrace{x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx}_{\text{int. per parti}} + C\Big]$$

C_2

$$= \frac{1}{x^2}\left[x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C\right] \quad \text{(INT. GENERALE}$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} = 4\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} + C\right]$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{\pi}{3}} = \cancel{\frac{\pi}{3}} + 4\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + C\right] \Rightarrow C = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

La soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{1}{x^2}\left[x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

2)
$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \; ; \; k \in \mathbb{N} \\ x^2 \neq h\pi \; ; \; h \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \pm\sqrt{h\pi} \quad h \in \mathbb{N} \\ x \neq \pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi} \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cosh(x) - \frac{1}{2}x^2}{x^2 \operatorname{tg}(x^2)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) - \left[1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right] - \frac{1}{2}x^2}{x^2\left[x^2 + o(x^2)\right]}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{24}\right)+o(x^4)}{x^4} = \frac{11}{24}.$$

C3

3) È sufficiente studiare la funzione

$$g(x)=e^x(x-1)$$

per poi studiarne il modulo.

$D=\mathbb{R}$

$g(0)=-1$; $g(x)=0 \iff x=1$

$g(x)>0 \iff x>1$; $g(x)<0 \iff x<1$.

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ (andamento superlineare: NO AS. OBLIQUO)

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=0$.

$g'(x)=e^x x=0 \iff x=0$

$g'(x)>0 \iff x>0$;

g ~~cresc~~ decresce in $(-\infty,0)$;

cresce in $(0,+\infty)$; $x=0$ punto di MIN. REL. e ASS.

C_4

$g''(x) = e^x(x+1)$

g convessa in $(-1, +\infty)$; concava in $(-\infty, -1)$.

$x = -1$ punto di flesso $\left(g(-1) = -\frac{2}{e}\right)$.

Grafico di g:

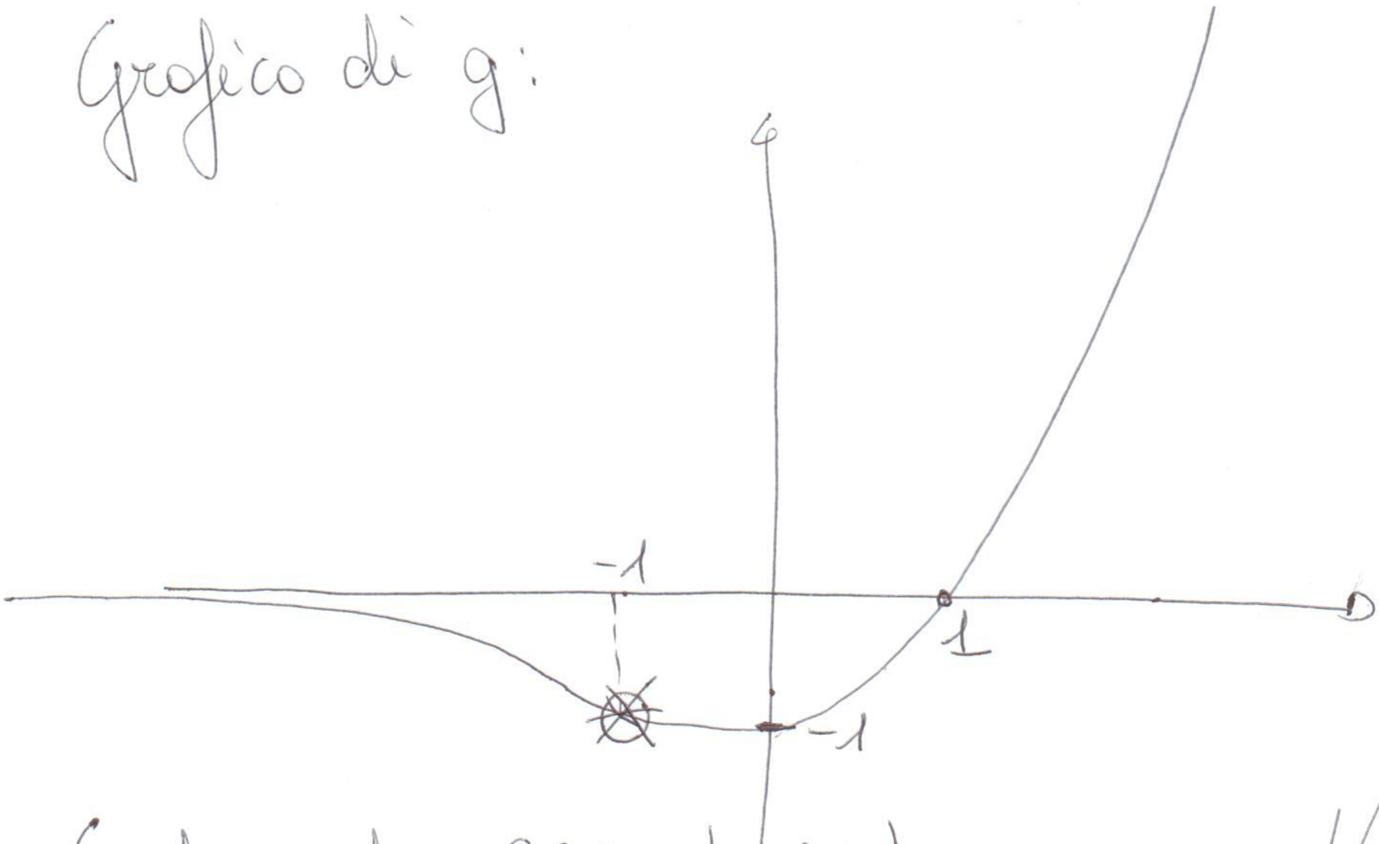
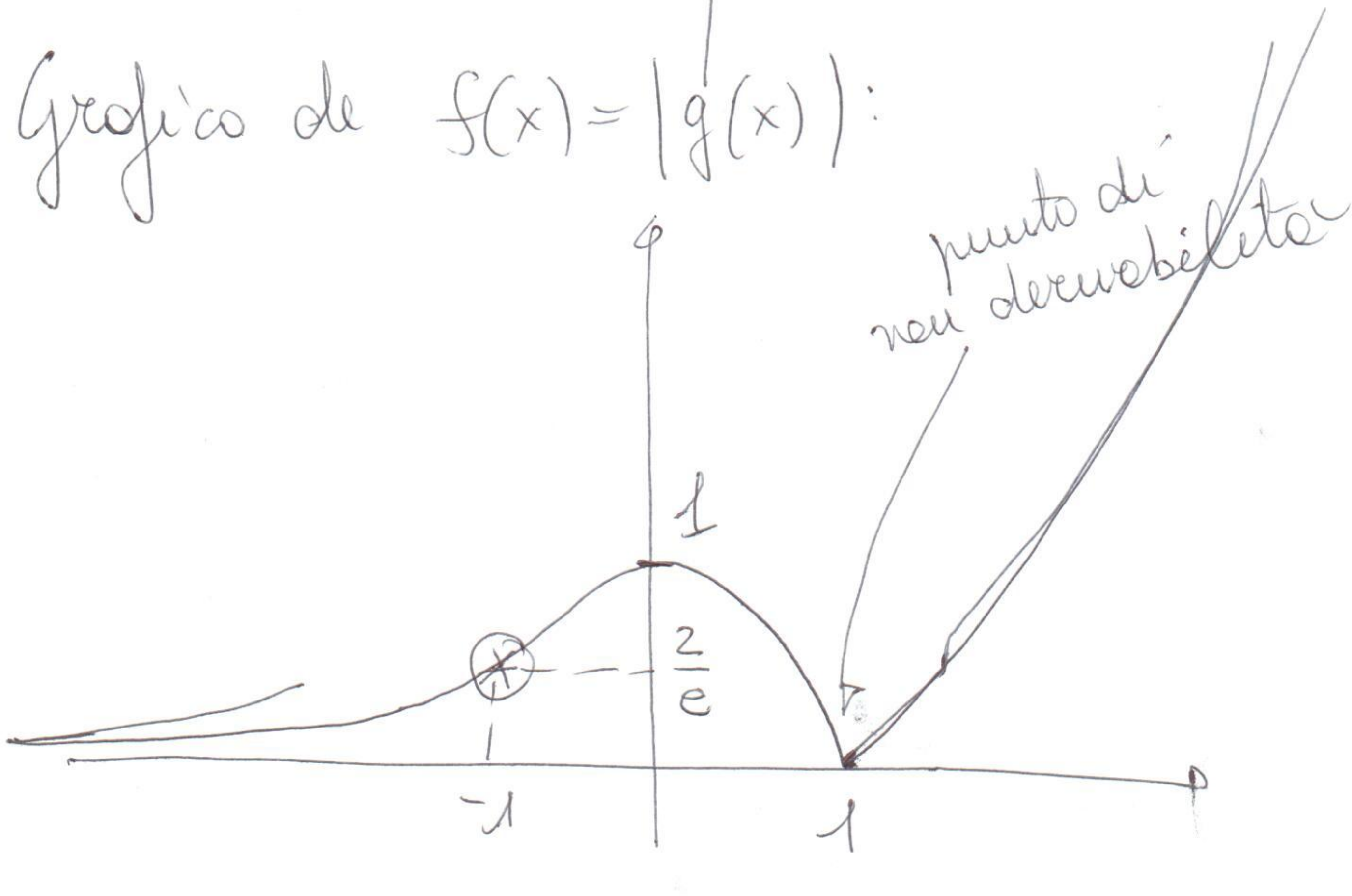


Grafico di $f(x) = |g(x)|$:



C5

In $[-1, +\infty)$:

$x = -1$ punto di MIN. REL. $f(-1) = \frac{2}{e}$

$x = 0$ punto di MAX. REL. $f(0) = 1$

$x = 1$ punto di MIN. ASS. $f(1) = 0$

$\nexists$ MAX. ASS. perchè $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

4) $z \neq -1-2i$

$$(z+2i-1)(z+2i+1) = 2iz-1$$

$$(z+2i)^2 \cancel{-1} = 2iz \cancel{-1}$$

$$z^2 + 2iz - 4 = 0$$

$$z_{1,2} = -i \pm \sqrt{-1+4} = \pm\sqrt{3} - i$$

$$z_1 = 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right] = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_2 = 2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right] = 2\left[\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right)\right] = 2e^{i\frac{7}{6}\pi}$$

5) $$\sqrt{\frac{n^2+3n+1}{n^2+1}}-1$$

$$=\sqrt{1+\frac{3n}{n^2+1}}-1 \sim \frac{3n}{2(n^2+1)} \sim \frac{3}{2n}$$

$$\Rightarrow \sum a_n \approx \sum \frac{3}{2n^{\alpha+1}}$$ convergente

$\Leftrightarrow \alpha+1>1$

$\Leftrightarrow \alpha>0$.