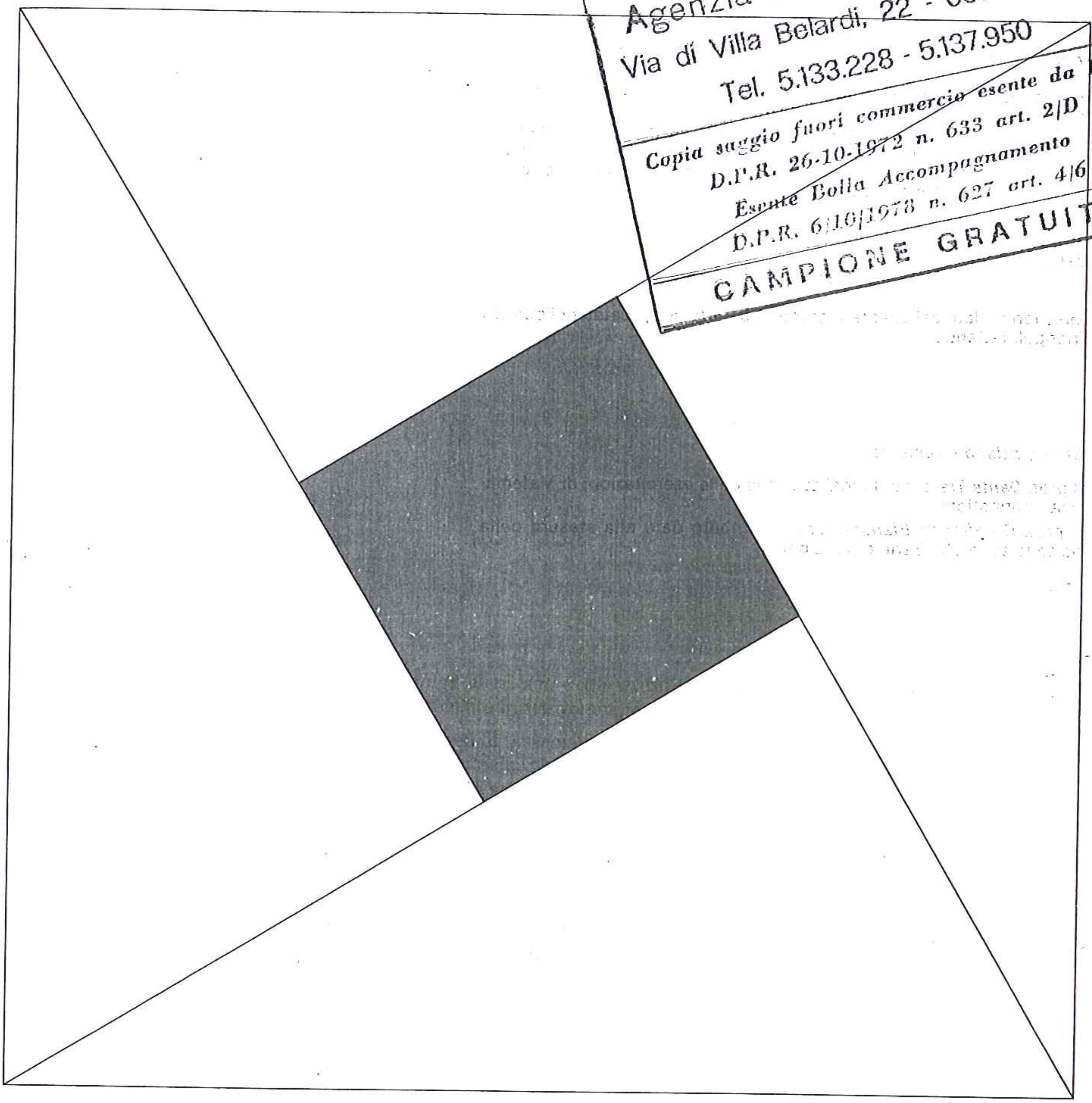

N. DODERO ▪ P. BARONCINI ▪ R. MANFREDI

ELEMENTI DI MATEMATICA 3

per gli istituti tecnici industriali – specializzazione informatica

GHISETTI E CORVI EDITORI

29. Da quanto esposto nel paragrafo precedente è poi evidente come si possa operare con i numeri complessi dati in forma esponenziale.

Siano $z_1 = \varrho_1 e^{i\varphi_1} \quad z_2 = \varrho_2 e^{i\varphi_2}$;

allora si ha

$$z_1 \cdot z_2 = \varrho_1 \varrho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Dato poi il numero $z = \varrho e^{i\varphi}$ si ha pure

$$z^n = \varrho^n e^{in\varphi}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\varrho}\ e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)} \quad \text{con } k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (n-1).$$

Forma matriciale dei numeri complessi

30. I numeri complessi possono essere rappresentati mediante particolari matrici quadrate di ordine due.

Definizione. Diremo che **la matrice quadrata**

$$Z = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

rappresenta il numero complesso

$$z = a + ib.$$

Diremo anche che la matrice Z è la **forma matriciale** del numero complesso z, ovvero che **la matrice Z è associata al numero complesso z.**

La definizione ora data è giustificata dal fatto che, grazie ad essa, le operazioni tra numeri complessi possono essere "trasformate" in operazioni tra matrici.

ESEMPIO

Rappresentare in forma matriciale i numeri complessi:

$$2 - 3i; \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i; \quad 7; \quad -5i.$$

Si ottengono le seguenti matrici:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Somma e differenza

31. Siano $z = a + ib$ e $w = c + id$ due numeri complessi, e siano

$$Z = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}; \quad W = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$$

le matrici che li rappresentano. È facile rendersi conto che *il numero complesso* $z + w$ *è rappresentato proprio dalla matrice* $Z + W$.

Infatti, si ha che

$$z + w = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d).$$

D'altra parte è

$$Z + W = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ -b-d & a+c \end{bmatrix}.$$

Dunque la matrice $Z + W$ rappresenta il numero complesso $z + w$.

Lasciamo al lettore come esercizio il compito di dimostrare che *il numero complesso* $z - w$ è rappresentato dalla matrice $Z - W$.

ESEMPIO

Dopo aver posto i numeri complessi

$$-3 + i\sqrt{2}; \quad 5 - i2\sqrt{2}$$

in forma matriciale, se ne esegua la somma.
Si ha che:

$$\begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -2\sqrt{2} \\ +2\sqrt{2} & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix},$$

matrice che rappresenta il numero complesso

$$(-3 + i\sqrt{2}) + (5 - i2\sqrt{2}) = 2 - i\sqrt{2}.$$

Prodotto

32. Siano ancora $z = a + ib$ e $w = c + id$ due numeri complessi, e siano

$$Z = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}; \quad W = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$$

le matrici che li rappresentano. Si dimostra facilmente che *il numero complesso* $z \cdot w$ *è rappresentato dalla matrice prodotto* $Z \cdot W$.

Infatti si ha che:

$$z \cdot w = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc),$$

mentre è

$$Z \cdot W = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -ad-bc & ac-bd \end{bmatrix}.$$

Dunque la matrice $Z \cdot W$ rappresenta proprio il numero complesso $z \cdot w$.

ESEMPI

1. Si esegua il prodotto dei numeri complessi

$$2+3i; \quad 3-4i.$$

Si determini quindi il prodotto delle matrici associate ad essi.
Si ha che

$$(2+3i)(3-4i) = 6-8i+9i-12i^2 = 18+i.$$

Inoltre è

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 1 \\ -1 & 18 \end{bmatrix}.$$

2. Dopo aver posto il numero complesso

$$z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

in forma matriciale, verificare che è $z^3 = 1$.
La matrice associata al numero complesso dato è

$$Z = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Si ha(*)

$$(Z)^3 = (Z \cdot Z) \cdot Z = \left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poiché la matrice $Z^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ risulta associata al numero complesso $1 + i \cdot 0 = 1$, resta verificato che $z^3 = 1$.

(*) Con la scrittura $(A)^n$ si indica il prodotto di n matrici quadrate tutte eguali ad A.

Modulo

33. Com'è noto, il *modulo* ϱ di un numero complesso $a + ib$ è il numero reale non negativo $\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$\varrho = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{1}$$

La matrice associata a tale numero complesso ha invece determinante eguale a $a^2 + b^2$:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2. \tag{2}$$

Confrontando la (1) con la (2), otteniamo

$$\varrho^2 = |a + ib|^2 = \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}.$$

Quindi il quadrato del modulo di un numero complesso è eguale al determinante della matrice ad esso associata.
Se $z = a + ib$ è un numero complesso, risulta $|z| \neq 0$ se e solo se $a \neq 0 \vee b \neq 0$, condizione che equivale a $z \neq 0$. Poiché una matrice è invertibile se e solo se il suo determinante non è nullo (n. 35 e 37 del cap. 26) possiamo concludere che *la matrice associata a un numero complesso non nullo è sempre invertibile.*

Reciproco

34. Il reciproco di un numero complesso $a + ib$ non nullo (n. 13) è

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{1}{a+ib} \cdot \frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\,\frac{b}{a^2+b^2}. \tag{1}$$

Per quanto detto al numero precedente, la matrice associata a $a + ib$ è invertibile, e la sua inversa (n. 38 del cap. 26) è

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{a}{a^2+b^2} & -\dfrac{b}{a^2+b^2} \\ \dfrac{b}{a^2+b^2} & \dfrac{a}{a^2+b^2} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Confrontando la (1) con la (2) giungiamo alla conclusione che *l'inversa della matrice associata a un numero complesso non nullo è la matrice associata al suo reciproco.*

ESEMPI

1. Determinare il reciproco del numero complesso $1-i$ e confrontare la matrice ad esso associata con l'inversa della matrice associata a $1-i$.

Si ha che $\frac{1}{1-i}=\frac{1}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}$.

La matrice associata a $1-i$ è $\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, e risulta

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

Dunque la trasposta della matrice associata ad un numero è la matrice che è associata al numero complesso $\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}$, reciproco del numero complesso $1-i$.

2. Moltiplicare la matrice associata al numero $2+i$ con l'inversa della matrice associata a $1-i$. Dedurre da tale risultato l'espressione del numero complesso

$$\frac{2+i}{1-i}.$$

La matrice associata a $2+i$ è

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

mentre l'inversa della matrice associata a $1-i$ è (vedi esempio 1)

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

Si ha pertanto

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

La matrice così ottenuta è associata al numero complesso $\frac{1}{2}+i\frac{3}{2}$. Poiché le matrici che abbiamo moltiplicato sono associate, rispettivamente, ai numeri complessi

$$2+i \text{ e } \frac{1}{1-i},$$

il loro prodotto risulta associato al prodotto di tali numeri complessi. Pertanto si ha

$$\frac{2+i}{1-i}=(2+i)\cdot\frac{1}{1-i}=\frac{1}{2}+i\frac{3}{2}.$$

Numero complesso coniugato

35. Come si ricorderà, il coniugato del numero complesso $a + ib$ è il numero complesso $a - ib$. Le matrici ad essi associate sono, rispettivamente:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

La seconda matrice, com'è evidente, è la trasposta della prima:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Dunque *la trasposta della matrice associata ad un numero complesso è associata al coniugato del numero complesso dato.*

ESEMPIO

Verifichiamo, operando con le matrici associate, che il prodotto di un numero complesso per il suo coniugato è un numero reale.
Si ha

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix}.$$

La matrice ottenuta è associata al numero complesso $(a^2 + b^2) + i0$, cioè al numero reale $a^2 + b^2$.

Laboratorio di Matematica-Informatica

36.

ESERCITAZIONI

Problema 1. Scrivere un programma per calcolare le radici n-esime di un numero complesso. Far comparire sullo schermo il modulo (ro) e l'anomalia (teta) prima dell'elenco delle radici ottenute.

Modello 1 in Metalinguaggio

```
Programma Radici Ennesime di Un Numero Complesso
var
inizio
   (acquisizione dei valori di a e b)
   (acquisizione dell'indice n della radice)
   (calcolo dei valori di ro e teta)
   (comunicazione dei valori di ro e teta)
   (ciclo per il calcolo e la comunicazione delle radici)
fine
```

Traduzione in linguaggio Basic

```
10 REM Programma Radici Ennesime Di Un Numero Complesso
20 PI = 3.141592
```