SVOLGIMENTI PROVA DI ESONERO DI ANALISI MAT. 1 DEL 21/11/23 TURNO 11,30

COMPITO A

A_1

1)
$$\frac{\binom{n+2}{n}}{\binom{n+3}{n}} = \frac{\left(\frac{(n+2)!}{n!\,2!}\right)}{\left(\frac{(n+3)!}{n!\,3!}\right)} = \frac{(n+2)!}{\cancel{n!}\,2!}\cdot\frac{\cancel{n!}\,3!}{(n+3)!}$$
$$= \frac{3}{n+3}$$

$$\Rightarrow \sum a_n = \sum \frac{3}{n+3}\cdot n^{\alpha} \approx 3\sum \frac{1}{n^{1-\alpha}}$$

La serie converge per $1-\alpha > 1 \Rightarrow \alpha < 0$

diverge per $1-\alpha \leq 1 \Rightarrow \alpha \geq 0$

2)
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(\frac{-2}{x^2}\right)\cdot\left[\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}\,\sqrt{x-1}}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(-2x)}{x}\left[\frac{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}\right)}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}}\right]$$

$$= -2\lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}-1-\cancel{x}-2}{2\sqrt{x}} = 3\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

A$_2$

3) $$z_{1,2} = (1+i) + \sqrt{(1+i)^2 - 4i}$$

$$= (1+i) + \sqrt{(1-i)^2} = (1+i) \pm (1-i) = \begin{cases} 2 \\ 2i \end{cases}$$

In alternativa,

$$z_{1,2} = (1+i) + \sqrt{\cancel{1}\cancel{-1}+2i-4i}$$

$$= (1+i) + \sqrt{-2i} = 1+i+\sqrt{2}\sqrt{-i}$$

$$= 1+i+\sqrt{2}\sqrt{e^{-i\frac{\pi}{2}}}$$

$$= \begin{cases} 1+i+\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} = 1+i+\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ 1+i-\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} = 1+i-\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow z_1 = 1+i+1-i = 2$$

$$z_2 = 1+i-1+i = 2i$$

Il risultato non contraddice il Teo. Fond. dell'Algebra, perché siamo in presenza di un'equazione algebrica di 2° grado, che ammette 2 soluzioni.

Metodo ancor più rapido (proposto dal Prof. Cifro):

$$z^2 - 2z - 2iz + 4i = 0$$

$$z(z-2) - 2i(z-2) = 0$$

$$(z-2i)(z-2) = 0$$

$$\Rightarrow z_1 = 2i \ ; \quad z_2 = 2.$$

A3