SVOLGIMENTI PROVA DI ESONERO di ANALISI MAT. 1 DEL 21/11/23 - ore 9,00

$C_1$

1) $$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}\,\ln n} = \frac{1}{\sqrt{n}+\ln n}$$

$a_n \to 0$ per $n \to +\infty$

Inoltre $a_n > a_{n+1} \iff \sqrt{n} + \ln n < \sqrt{n+1} + \ln(n+1)$

sempre vero, perchè sia $\sqrt{n}$, sia $\ln n$ sono crescenti.

$\Rightarrow$ La serie converge.

2) $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2}-1}{ax^2} = \frac{1}{a}$$

$f(0)=b$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ f è CONTINUA in $x=0 \iff b = \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$

$\iff a=2$ ; $b=\frac{1}{2}$

In tutti gli altri punti f è continua perchè composizione di funzioni continue.

3) Poniamo $t=z^2$

$\Rightarrow t^2 - t + 1 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad ; \quad z_{3,4} = \sqrt{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$C_2$

$$z_{1,2} = \sqrt{e^{i\frac{\pi}{3}}} \quad \Rightarrow \quad z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$z_2 = -z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

$$z_{3,4} = \sqrt{e^{-i\frac{\pi}{3}}} \quad \Rightarrow \quad z_3 = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

$$z_4 = -z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}.$$

Il risultato non contraddice il Teorema Fondamentale dell'Algebra, perchè, trattandosi di un'equazione algebrica di 4° grado, deve ammettere 4 soluzioni.