Corso di Laurea in Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio - sede distaccata di Latina

Corso di Analisi Matematica (2° modulo) - a.a. 2003/04

APPUNTI INTEGRATIVI SUGLI INTEGRALI GENERALIZZATI

Ricordiamo che agli integrali impropri, in quanto limiti di integrali definiti, possono essere applicate le varie regole di integrazione, quali le proprietà additiva, di linearità, le regole di integrazione per parti e per sostituzione ecc., <u>purché esse abbiano significato sulla retta ampliata</u>.

Poiché gli integrali generalizzati sono ottenuti come limiti di integrali definiti, il primo passo consiste nel suddividere l'intervallo di integrazione in un numero di sottointervalli tale che ogni integrale su ognuno di tali sottointervalli possa essere calcolato tramite una sola operazione di limite. Se, ad esempio, vogliamo calcolare l'integrale sull'intera retta di una funzione ovunque continua, spezzeremo la retta in due semirette arbitrarie $(-\infty, a] \cup [a, +\infty)$ e procederemo al calcolo dell'integrale nel seguente modo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{a} f(x)\, dx + \lim_{\beta \to +\infty} \int_{a}^{\beta} f(x)\, dx \ .$$

Quindi, la teoria dell'integrazione impropria, nella sostanza, si applica a funzioni continue su intervalli che non siano chiusi e limitati, nel senso che le funzioni in esame potrebbero presentare discontinuità o non essere definite sul bordo dell'intervallo limitato, oppure essere definite su intervalli illimitati. In entrambi i casi, la teoria dell'integrazione delle funzioni continue su intervalli chiusi e limitati risulta inadeguata, in quanto, in pratica, mentre per tali funzioni il valore dell'integrale definito è sicuramente finito, nel caso di funzioni o di intervalli illimitati l'integrale potrebbe divergere o addirittura non esistere. Seguendo questo spirito, è allora chiaro che possiamo calcolare gli integrali definiti di funzioni prolungabili per continuità o che abbiano discontuità di salto, in quanto, come è facile comprendere intuitivamente, anche per esse l'integrale definito converge. Sarà infatti sufficiente costruire una nuova funzione, ottenuta prolungando fino agli estremi la funzione in esame, che risulterà, in tal modo, continua su intervalli chiusi e limitati e alla quale si potrà applicare la teoria già nota. Il prolungamento della funzione non varia il valore dell'integrale in esame, in quanto, poiché la funzione ha un limite finito, il prolungamento consiste nel calcolare una "area algebrica" di una figura che differisce dalla precedente per un rettangolo di altezza finita e di base avente lunghezza nulla, la cui area, pertanto, è nulla.

Sarà quindi sufficiente occuparsi dell'integrazione di funzioni dotate di (un numero finito di) punti di infinito e di funzioni continue su un intervallo illimitato.

Si ricordi, infine, che, per funzioni positive (ma il discorso è analogo per le funzioni negative), l'integrale esiste sempre (finito o infinito), in quanto limite di funzione monotòna, quale è la funzione integrale.

Esempio 1 (integrazione per parti) Calcolare

$$\Gamma(n+1) \ = \ \int_{0}^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx \quad ; \quad \forall n \in I\!N \ . \tag{1}$$

Consideriamo innanzitutto il caso $n = 1$, integrando per parti:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\, dx \;=\; -xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} \;+\; \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx \;= -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} \;=\; 1 \ ,$$

dove si è sfruttato il limite $\lim_{x\to+\infty} \left(x^n e^{-x}\right) = 0 \quad \forall n \in I\!N$ e si è adottata l'utile convenzione (facilmente adattabile al calcolo di integrali impropri di qualsiasi tipo)

$$F(x)\Big|_0^{+\infty} \;:=\; \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(0) \ .$$

Per dimostrare la (1) in generale, osserviamo che, integrando per parti,

$$\Gamma(n+1) \;=\; \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx \;=\; -x^n e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\, dx \;=\; n\Gamma(n) \quad , \quad \forall n \in I\!N \ .$$

Pertanto

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3 \cdot 2 = 3!$$

$$\Gamma(5) = 4\Gamma(4) = 4 \cdot 3! = 4!$$

.

.

.

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx = n\Gamma(n) = n! \qquad .$$

L'importante formula ricorsiva trovata permette di legare il fattoriale di un numero intero a un integrale improprio. Questo consente di estendere il concetto di fattoriale a un generico numero reale positivo, tramite la cosiddetta *funzione Gamma di Eulero*, che acquista una notevolissima importanza nell'analisi e nelle sue applicazioni:

$$\Gamma(\alpha+1) \;=\; \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\, dx \quad , \quad \forall \alpha \in I\!R^+ \ .$$

Tali integrali convergono, in quanto, per il criterio del confronto, $x^\alpha e^{-x} \leq x^n e^{-x} \ \forall x \geq 1 \ , \ \forall \alpha \in I\!R^+$, dove n è il più piccolo dei numeri interi maggiori o uguali di α e, come abbiamo appena dimostrato, l'integrale in $[0, +\infty)$ di ogni funzione $x^n e^{-x}$ converge.

A parte i casi in cui $\alpha \in I\!N$ e altri particolari valori, non è possibile, in generale, calcolare esplicitamente i valori della Gamma. Esistono però tabelle che riportano tali valori. Inoltre, è facile verificare che, per ogni $\alpha > 0$, vale la regola ricorsiva

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha) \ .$$

Inoltre, come già visto,

$$\Gamma(n+1) = n! \ .$$

La Gamma di Eulero può essere definita anche per $\alpha > -1$ e perfino per numeri complessi. Non ci soffermeremo però su questi casi. Ulteriori proprietà della Gamma di Eulero possono essere trovate su molti testi, quali, ad esempio, [GCB, pp. 215/219], [GRT, pp. 236/238].

Esempio n. 1bis (linearità) Dall'esempio precedente e dalla proprietà di linearità degli integrali discende immediatamente che tutti gli integrali $\displaystyle\int_0^{+\infty} P_n(x)e^{-x}\,dx$ (dove P_n rappresenta un generico polinomio di grado n) convergono. Infatti

$$\int_0^{+\infty} P_n(x)e^{-x}\,dx \;=\; \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \cdot e^{-x}\,dx \;=\; \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^{+\infty} x^k e^{-x}\,dx \;=\; \sum_{k=0}^{n} a_k k!\ .$$

Esempio n. 2 (sostituzione) Si calcoli

$$\int_0^1 |\log^n(x)|\,dx \quad \forall n \in I\!N\ .$$

Si osservi, innanzitutto, che, nell'intervallo $(0,1], \log(x) < 0$; pertanto, $|\log(x)| = -\log(x)$.

Operando la sostituzione $t = -\log(x)$, da cui $x = e^{-t}$; $dx = -e^{-t}\,dt$; $\lim_{x\to 0} t(x) = +\infty$; $t(1) = 0$, si ottiene

$$\int_0^1 [-\log^n(x)]\,dx \;=\; -\int_{+\infty}^0 t^n e^{-t}\,dt \;=\; \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt \;=\; n!\ ,$$

per quanto visto nell'esempio precedente.

Esempio n. 3 Si calcoli

$$\int_0^1 \log^n(x)\,dx \quad \forall n \in I\!N\ .$$

Operando la sostituzione $t = -\log(x)$, da cui $x = e^{-t}$; $dx = -e^{-t}\,dt$; $\lim_{x\to 0} t(x) = +\infty$; $t(1) = 0$, si ottiene

$$\int_0^1 \log^n(x)\,dx \;=\; -\int_{+\infty}^0 (-t)^n e^{-t}\,dt \;=\; (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt \;=\; (-1)^n\, n!\ .$$

In particolare, si ricava che

$$\int_0^1 \log(x)\,dx \;=\; -1\ ,$$

come si può verificare anche direttamente, tenendo conto che, integrando per parti,

$$\int_0^1 \log(x)\,dx \;=\; [x\log(x) - x]\Big|_0^1 \;=\; -1 - \lim_{x\to 0^+} x\log(x) \;=\; -1\ .$$

Esempio n. 4 (fratti semplici) Si calcoli

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2(x-1)^2}\,dx\ .$$

La funzione integranda presenta due singolarità, in 0 e in 1. Essendo positiva, il suo integrale esiste. Utilizzando il metodo dei fratti semplici, riscriviamo l'integrale:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2(x-1)^2}\,dx \;=\; \int_0^1 \left[\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right]\,dx \;=$$

$$=\; 2\log(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{x}\Big|_0^1 - 2\log(|x-1|)\Big|_0^1 - \frac{1}{x-1}\Big|_0^1 \;=$$

$$=\; -2\lim_{x\to 0^+}\log(x) - 1 + \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} - 2\lim_{x\to 1^-}\log(|x-1|) - \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1} - 1 \;=\; +\infty\ .$$

Esercizio n. 1 Calcolare

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x-1}\,dx$$

(**Suggerimento:** operare la sostituzione $t = e^x$). **Risposta:** $+\infty$.

Esempio n. 5 Si calcoli

$$I_1 = \int_0^a \frac{1}{x\log x}\,dx \quad ; \quad I_2 = \int_a^1 \frac{1}{x\log x}\,dx \quad ; \quad I_3 = \int_1^b \frac{1}{x\log x}\,dx \quad ; \quad I_4 = \int_b^{+\infty} \frac{1}{x\log x}\,dx \quad ;$$

$$0 < a < 1 \quad ; \quad 1 < b < +\infty\ .$$

Poiché

$$\int \frac{1}{x\log x}\,dx \;=\; \log(|\log(x)|) \;+\; C\ ,$$

avremo

$$I_1 \;=\; \int_0^a \frac{1}{x\log(x)}\,dx \;=\; \log(|\log(a)|) - \lim_{x\to 0^+}\log(|\log(x)|) \;=\; -\infty\ ;$$

$$\int_a^1 \frac{1}{x\log(x)}\,dx \;=\; \lim_{x\to 1^\pm}\log(|\log(x)|) - \log(|\log(a)|) \;=\; -\infty$$

da cui $\quad I_2 \;=\; -\infty \quad ; \quad I_3 \;=\; +\infty\ ;$

$$I_4 \;=\; \int_b^{+\infty} \frac{1}{x\log(x)}\,dx \;=\; \lim_{x\to +\infty}\log(|\log(x)|) - \log(|\log(a)|) \;=\; +\infty\ .$$

Esempio n. 6 Si voglia calcolare

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx\ .$$

Poiché la funzione ha un punto di infinito in $x = 0$, calcoliamo l'integrale spezzandolo in due parti:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx \;=\; \int_{-1}^0 \frac{1}{x}\,dx \;+\; \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx \;=\; \lim_{b\to 0^-}\int_{-1}^b \frac{1}{x}\,dx \;+\; \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{x}\,dx \;=$$

$$\lim_{b\to 0^-}\log|x|\Big|_{-1}^b \;+\; \lim_{a\to 0^+}\log|x|\Big|_a^1 \;=\; \lim_{b\to 0^-}\log|b| \;-\; \lim_{a\to 0^+}\log a \;=\; -\infty+\infty\ .$$

Si osservi che i due limiti in b e a sono tra loro indipendenti. Pertanto non è possibile risolvere la forma indeterminata e l'integrale non esiste. Se però si osserva che la funzione integranda è dispari, si potrebbe supporre che, in analogia con gli integrali definiti di funzioni continue su intervalli chiusi e limitati, il sottografico della funzione nell'intervallo $(0,1]$ abbia stessa "area" del sopragrafico della funzione nell'intervallo $[-1,0)$ e che, pertanto, ci si debba aspettare un integrale uguale a zero. Facciamo però vedere che, a seconda di come si leghino i limiti di a e di b, l'integrale può assumere qualsiasi valore della retta ampliata.

a) Consideriamo $|b| = ka\ ,\ k > 0$. In tal caso, si ha

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx \;=\; \lim_{a\to 0^+} \log(ka) \;-\; \lim_{a\to 0^+} \log a \;=\; \lim_{a\to 0^+} \log k \;=\log k\ ,$$

che assume valori positivi per $k > 1$, negativi per $0 < k < 1$, mentre per $k = 1$ l'integrale si annulla.

b) Consideriamo $|b| = a^{\alpha}\ , \alpha \in I\!R^{+}$. In tal caso, si ha

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx \;=\; \lim_{a\to 0^+} \log\left(a^{\alpha}\right) \;-\; \lim_{a\to 0^+} \log a \;=\; \lim_{a\to 0^+} \log a^{\alpha-1} \;=\; \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \in (0,1) \\ -\infty & \text{se } \alpha \in (1,+\infty) \\ 0 & \text{se } \alpha = 1 \end{cases} .$$

L'unico caso in cui l'integrale si annulla corrisponde a quando a e b tendono a 0 nello stesso modo. Questo modo di calcolare l'integrale, *a priori*, non ha nessun motivo di essere ritenuto il modo corretto di calcolare l'integrale in oggetto. È però, come dicevamo, l'unico che fornisce una risposta che va incontro all'intuito. Esso corrisponde a calcolare l'integrale operando su intervalli simmetrici rispetto a 0. Tale modo di calcolare l'integrale prende il nome di *integrale secondo Cauchy* e il valore ottenuto prende il nome di *valore principale dell'integrale* (si veda, ad esempio, [GRT, pp. 198/202]).

L'esempio mostrato comporta altre due importanti osservazioni:

Osservazione 1 Quando si procede al calcolo di un integrale di una funzione pari su un intervallo simmetrico rispetto all'origine, sia esso limitato o illimitato, si può scrivere

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx \;=\; \int_{-a}^{0} f(x)\, dx \;+\; \int_{0}^{a} f(x)\, dx \;=\; \int_{a}^{0} f(-x)\, d(-x) \;+\; \int_{0}^{a} f(x)\, dx \;=$$
$$=\; \int_{0}^{a} f(x)\, dx \;+\; \int_{0}^{a} f(x)\, dx\ .$$

È evidente che, se il secondo integrale converge, diverge o non ammette limite, analogamente si comporta il primo integrale. Pertanto, possiamo dire, anche per gli integrali impropri, che, per le funzioni pari,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx \;=\; 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx\ ,$$

qualsiasi sia l'esito del limite a secondo membro.

Qualora si abbia a che fare con integrali di funzioni dispari su intervalli simmetrici, essi non esistono oppure si annullano. Il primo caso è stato già mostrato nel precedente esempio e corrisponde al caso in cui l'integrale nell'intervallo $(0,a)$ non esiste oppure diverge. Poiché, come già analizzato nel precedente esempio, l'osservazione geometrica spingerebbe a dire che gli integrali di funzioni dispari su intervalli simmetrici debbano essere nulli, occorre un metodo di integrazione particolare, dovuto a Cauchy, che consiste, in sostanza, nell'integrare su intervalli simmetrici che ricoprono l'intervallo $(-a, a)$. Il secondo caso si ha quando l'integrale su $(0, a)$ converge. In tal caso, infatti, l'integrale su $(-a, 0)$ fornisce un valore opposto e la somma dà 0.

Esempio n. 7

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 2\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 2\arcsin(x)\Big|_0^1 = \pi \; .$$

Esercizio n. 2 Calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx$$

Risposta: π .

Osservazione 2 Per gli integrali impropri si riscontrano situazioni riconducibili alle serie numeriche. Si ricorderà che, per le serie numeriche convergenti, ma assolutamente divergenti, è possibile riordinare gli addendi in modo tale da ottenere qualsiasi valore della retta ampliata, per la somma. Le serie assolutamente convergenti, invece, sono tali che la loro somma non dipende dal riordinamento scelto. La proprietà corrispondente per gli integrali impropri consiste nella *assoluta integrabilità*: una funzione dispari assolutamente integrabile su un intervallo simmetrico è tale che il suo integrale è nullo, mentre una funzione dispari non assolutamente integrabile è tale che il suo integrale improprio può assumere qualsiasi valore della retta ampliata, a seconda di come si operino i limiti. La funzione $f(x) = 1/x$, infatti, non è assolutamente integrabile in $[-1, 1]$:

$$\int_{-1}^{1} \left|\frac{1}{x}\right| dx = 2\int_{0}^{1} \frac{1}{x}\, dx = +\infty \; .$$

Esempio 8 La funzione $f(x) = \tan x$ è dispari. Calcoliamo l'integrale

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x\, dx &= \lim_{a\to -\frac{\pi}{2}^+} \int_a^0 \tan x\, dx + \lim_{b\to \frac{\pi}{2}^-} \int_0^b \tan x\, dx = \\ &= \lim_{a\to -\frac{\pi}{2}^+} [-\log|\cos x|]\Big|_a^0 + \lim_{b\to \frac{\pi}{2}^-} [-\log|\cos x|]\Big|_0^b = \\ &= \lim_{a\to -\frac{\pi}{2}^+} \log(\cos a) + \lim_{b\to \frac{\pi}{2}^-} [-\log(\cos b|) = -\infty + \infty \quad .\end{aligned}$$

L'integrale, dunque, non esiste, se non secondo Cauchy.

Osservazione 3 Negli integrali su intervalli illimitati, se la funzione ammette un limite, per $x \to \pm\infty$, diverso da 0, l'integrale sicuramente diverge. Nel caso in cui il limite della funzione è $\pm\infty$ (studiamo il caso in cui $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; analogamente si tratteranno gli altri casi), possiamo dire che, comunque fissata $M > 0$, esiste una $\bar{x}$ tale che, $\forall x > \bar{x}$, $f(x) \geq M$. Pertanto, per il criterio del confronto,

$$\int_{\bar{x}}^{+\infty} f(x)\ dx\ \geq\ \int_{\bar{x}}^{+\infty} M\ dx\ =\ +\infty\ .$$

Consideriamo ora il caso $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = l \in I\!R - \{0\}$. Per fissare le idee, poniamo $l > 0$. Possiamo dire che, ad esempio, esiste una $\bar{x}$ tale che $\forall x > \bar{x}$, $f(x) \geq \frac{l}{2}$. Pertanto, per il criterio del confronto,

$$\int_{\bar{x}}^{+\infty} f(x)\ dx\ \geq\ \int_{\bar{x}}^{+\infty} \frac{l}{2}\ dx\ =\ +\infty\ .$$

Sembrerebbe, dunque, che, in analogia con le serie, la condizione $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ costituisca una condizione necessaria (sicuramente non sufficiente) per la convergenza di integrali su intervalli illimitati. Contrariamente all'intuito, questa affermazione non è vera. Come mostra il prossimo esempio, esistono funzioni che non ammettono limite per $x \to \pm\infty$, ma il cui integrale converge.

Esempio 9 Calcoliamo

$$\int_0^{+\infty} f(x)\ dx\ ,$$

dove

$$f(x) = \begin{cases} n + n^4(x-n) & \text{se } x \in [n - \frac{1}{n^3}, n)\ ,\ n \in I\!N - \{0\ ,\ 1\} \\ n - n^4(x-n) & \text{se } x \in [n, n + \frac{1}{n^3}]\ ,\ n \in I\!N - \{0\ ,\ 1\} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} .$$

Tale funzione, come mostrato nella figura 1, è non negativa, nulla dappertutto, tranne in intervalli, centrati in $n \in I\!N$, la cui lunghezza, al crescere di n, decresce come $\dfrac{1}{n^3}$; in tali intervalli la funzione si comporta in modo lineare; il suo grafico ha pendenza n^4 nel semi-intervallo sinistro e pendenza $-n^4$ nel semi-intervallo destro. Pertanto la funzione, in corrispondenza di n, assume valore n. In ognuno di tali intervalli il sottografico ha area pari a quella di un triangolo di base $\dfrac{2}{n^3}$ e di altezza n, cioè $\dfrac{1}{n^2}$. Pertanto, l'integrale (che esiste, in quanto la funzione è non negativa) può essere calcolato tenendo conto solo degli intervalli in cui la funzione non si annulla. Avremo quindi

$$\int_0^{+\infty} f(x)\ dx\ =\ \sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-\frac{1}{n^3}}^{n+\frac{1}{n^3}} f(x)\ dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\ .$$

Poiché la serie a ultimo membro, come noto, converge, converge anche l'integrale in esame, nonostante il limite della f, per $x \to +\infty$, non esista.

Un esempio simile può essere trovato su [GRE, pp. 200/203].

I CRITERI DI INTEGRABILITÀ

Richiamiamo il criterio del confronto, valido per funzioni di segno costante (per semplicità le assumeremo non negative), sia per intervalli limitati che per intervalli illimitati.

Criterio del confronto

1) Siano f, g continue in $[a,b)$, $-\infty < a < b \leq +\infty$ e tali che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b)$. Allora g integrabile $\Rightarrow$ f integrabile ; f non integrabile $\Rightarrow$ g non integrabile.

2) Siano f, g continue in $(a,b]$, $-\infty \leq a < b < +\infty$ e tali che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in (a,b]$. Allora g integrabile $\Rightarrow$ f integrabile ; f non integrabile $\Rightarrow$ g non integrabile.

Questo criterio risulta essere molto utile nel momento in cui si abbiano delle funzioni campione di confronto. Si può, ad esempio, prendere come funzione campione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x-a|^\alpha} & \text{in } (a,b] \text{ se } a \in I\!R \\ \frac{1}{|x-b|^\alpha} & \text{in } [a,b) \text{ se } b \in I\!R \\ \frac{1}{\left|x^\alpha\right|} & \text{in } (a,b] \text{ se } a = -\infty \text{ oppure in } [a,b) \text{ se } b = +\infty \end{cases} .$$

Infatti, il comportamento di tali funzioni è noto:

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\, dx \;=\; \begin{cases} < +\infty & \text{se } \alpha < 1 \\ = +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx \;=\; \begin{cases} < +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ = +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases} \quad ; \quad a > 0 .$$

Avremo pertanto

Corollario n. 1 Sia f non negativa e tale che, nell'intervallo limitato $[a,b]$, abbia un solo punto singolare x_0. Se esiste una costante $K > 0$ tale che

$$0 \;\leq\; f(x) \;\leq\; \frac{K}{|x-x_0|^\alpha} \quad \forall x \in [a,b] - \{x_0\} ,$$

con $\alpha < 1$, allora la funzione è integrabile in $[a,b]$.

Se esiste una costante $H > 0$ tale che

$$f(x) \;\geq\; \frac{H}{|x-x_0|^\alpha} \quad \forall x \in [a,b] - \{x_0\} ,$$

con $\alpha \geq 1$, allora la funzione non è integrabile in $[a,b]$.

Corollario n. 2 Sia f non negativa in $[a,+\infty)$, $a > 0$. Se esiste una costante $K > 0$ tale che

$$0 \;\leq\; f(x) \;\leq\; \frac{K}{x^\alpha} \quad \forall x \in [a,+\infty) ,$$

con $\alpha > 1$, allora la funzione è integrabile in $[a,+\infty)$.

Se esiste una costante $H > 0$ tale che

$$f(x) \;\geq\; \frac{H}{x^\alpha} \quad \forall x \in [a,+\infty) ,$$

con $\alpha \leq 1$, allora la funzione non è integrabile in $[a, +\infty)$.

Riportiamo anche i criteri del confronto asintotico, anch'essi validi per funzioni di segno costante.

Primo criterio del confronto asintotico

1) Siano f, g continue in $[a, b)$, $-\infty < a < b \leq +\infty$; se, per $x \to b^-$, $f(x) \sim g(x)$, allora
f integrabile $\quad\Leftrightarrow\quad$ g integrabile.

2) Siano f, g continue in $(a, b]$, $-\infty \leq a < b < +\infty$; se, per $x \to a^+$, $f(x) \sim g(x)$, allora
f integrabile $\quad\Leftrightarrow\quad$ g integrabile.

Osservazione n. 4 Per $x \to 0$, è utile, ai fini dell'applicazione del criterio asintotico, ricordare la catena di infinitesimi equivalenti:

$$x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \log(1+x) \sim e^x - 1 \sim \sinh x \sim settsinhx \tag{2}$$

nonché

$$\cos x - 1 \sim \frac{x^2}{2} \quad ; \quad (1+x)^\alpha \sim 1 + \alpha x \ .$$

Inoltre, quando si consideri un limite per $x \to a$, $a \in I\!R$, si possono eventualmente applicare tali formule, operando la sostituzione $t = x - a$ e osservando che, per $x \to a$, $t \to 0$.

Secondo criterio del confronto asintotico

1) Siano f, g continue in $[a, b)$, $-\infty < a < b \leq +\infty$; se, per $x \to b^-$, $f = o(g)$, allora
g integrabile $\quad\Rightarrow\quad$ f integrabile;
f non integrabile $\quad\Rightarrow\quad$ g non integrabile.

2) Siano f, g continue in $(a, b]$, $-\infty \leq a < b < +\infty$; se, per $x \to a^+$, $f = o(g)$, allora
g integrabile $\quad\Rightarrow\quad$ f integrabile;
f non integrabile $\quad\Rightarrow\quad$ g non integrabile.

Richiamiamo infine il criterio di assoluta integrabilità, che può essere applicato a funzioni di segno qualsiasi.

Criterio di assoluta integrabilità

Sia f funzione continua, di segno qualsiasi, nell'intervallo $[a, b)$, oppure nell'intervallo $(a, b]$. Se la funzione è assolutamente integrabile, allora essa è integrabile. In formule,

$$\int_a^b |f(x)|\, dx \quad \text{converge} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\, dx \quad \text{converge}$$

o, analogamente,

$$\int_a^b |f(x)|\, dx < +\infty \quad \Rightarrow \quad \left| \int_a^b f(x)\, dx \right| < +\infty \ .$$

Osservazione n. 5 Poiché, ovviamente, la funzione $|f|$ è non negativa, per studiarne l'integrabilità è possibile applicare ad essa i criteri di integrabilità per le funzioni di segno costante. Pertanto, considerata una funzione f, continua nell'intervallo in cui si vuole calcolare l'integrale e una funzione g, continua e positiva, avremo i seguenti criteri:

1) Sia $|f(x)| \leq g(x)\ \forall x \in [a, b)\ ,\ -\infty < a < b \leq +\infty$. Allora
g integrabile $\Rightarrow$ f assolutamente integrabile $\Rightarrow$ f integrabile.

2) Sia $|f(x)| \leq g(x)\ \forall x \in (a, b]\ ,\ -\infty \leq a < b < +\infty$. Allora
g integrabile $\Rightarrow$ f assolutamente integrabile $\Rightarrow$ f integrabile.

3) Sia $|f(x)| \geq g(x)\ \forall x \in [a, b)\ ,\ -\infty < a < b \leq +\infty$. Allora
g non integrabile $\Rightarrow$ f non integrabile assolutamente.

4) Sia $|f(x)| \geq g(x)\ \forall x \in (a, b]\ ,\ -\infty \leq a < b < +\infty$. Allora
g non integrabile $\Rightarrow$ f non integrabile assolutamente.

5) Sia f tale che, nell'intervallo limitato $[a, b]$, abbia un solo punto singolare x_0. Se esiste una costante $K > 0$ tale che

$$|f(x)| \leq \frac{K}{|x - x_0|^\alpha} \quad \forall x \in [a, b] - \{x_0\}\ ,$$

con $\alpha < 1$, allora la funzione è assolutamente integrabile (e quindi integrabile) in $[a, b]$.

Se esiste una costante $H > 0$ tale che

$$f(x) \geq \frac{H}{|x - x_0|^\alpha} \quad \forall x \in [a, b] - \{x_0\}\ ,$$

con $\alpha \geq 1$, allora la funzione non è assolutamente integrabile in $[a, b]$.

6) Sia f continua in $[a, +\infty)\ ,\ a > 0$. Se esiste una costante $K > 0$ tale che

$$|f(x)| \leq \frac{K}{x^\alpha} \quad \forall x \in [a, +\infty)\ ,$$

con $\alpha > 1$, allora la funzione è assolutamente integrabile (e quindi integrabile) in $[a, +\infty)$.

Se esiste una costante $H > 0$ tale che

$$|f(x)| \geq \frac{H}{x^\alpha} \quad \forall x \in [a, +\infty)\ ,$$

con $\alpha \leq 1$, allora la funzione non è assolutamente integrabile in $[a, +\infty)$.

7) Se, per $x \to b^-\ ,\ |f(x)| \sim g(x)$, allora
g integrabile in $[a, b)\ ,\ -\infty < a < b \leq +\infty$ $\Rightarrow$ f assolutamente integrabile (e quindi integrabile).

8) Se, per $x \to a^+\ ,\ |f(x)| \sim g(x)$, allora
g integrabile in $(a, b]\ ,\ -\infty \leq a < b < +\infty$ $\Rightarrow$ f assolutamente integrabile (e quindi integrabile).

9) Se, per $x \to b^-\ ,\ |f| = o(g)$, allora
g integrabile in $[a, b)\ ,\ -\infty < a < b \leq +\infty$ $\Rightarrow$ f assolutamente integrabile (e quindi integrabile).

10) Se, per $x \to a^+\ ,\ |f| = o(g)$, allora
g integrabile in $(a, b]\ ,\ -\infty \leq a < b < +\infty$ $\Rightarrow$ f assolutamente integrabile (e quindi integrabile).

Esempio n. 10 Studiamo, come utile esercizio, l'integrabilità di alcune funzioni esposte nei precedenti esempi.

La funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^2(x-1)^2}$ non è integrabile in $(0,a]$, $0 < a < 1$, in quanto, per $x \to 0$, $\dfrac{1}{x^2(x-1)^2} \sim \dfrac{1}{x^2}$ e quest'ultima funzione non è integrabile in alcun intervallo limitato avente come estremo 0; analogamente, f non è integrabile in $[a,1)$, $0 < a < 1$, in quanto, per $x \to 1$, $\dfrac{1}{x^2(x-1)^2} \sim \dfrac{1}{(x-1)^2}$ e quest'ultima funzione non è integrabile in alcun intervallo limitato avente come estremo 1.

La funzione $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$ non è integrabile in $(0,1]$, in quanto, per $x \to 0$, $\dfrac{1}{e^x-1} \sim \dfrac{1}{x}$ e quest'ultima funzione non è integrabile in $(0,1]$.

La funzione $f(x) = \frac{1}{x \log x}$ non è integrabile in intervalli del tipo $[a,1)$, $0 < a < 1$, oppure $(1,b]$, $1 < b < +\infty$, in quanto, ponendo $x = 1+t$, si ha, per $x \to 1$ (cioè per $t \to 0$),

$$\frac{1}{x\log x} = \frac{1}{(1+t)\log(1+t)} \sim \frac{1}{t}$$

e quest'ultima funzione non è integrabile in alcun intervallo limitato nella variabile t avente come estremo 0, che corrisponde a un intervallo limitato nella variabile x avente come estremo 1.

La funzione $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ risulta integrabile in $[0,1)$ e quindi, data la sua simmetria, in $(-1,1)$, in quanto, per $x \to 1^-$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)}} \sim \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2|x-1|^{1/2}}$$

e quest'ultima funzione è integrabile in $[0,1)$.

La funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ è integrabile in $[0,+\infty)$ e quindi, per simmetria, in $\mathbb{R}$, in quanto, per $x \to +\infty$, $\dfrac{1}{x^2+1} \sim \dfrac{1}{x^2}$ e quest'ultima funzione è integrabile in $[0,+\infty)$.

Osservazione n. 6 Per $x \to +\infty$, $\dfrac{1}{x\log x} = o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, ma $\dfrac{1}{x^{1+\alpha}} = o\left(\dfrac{1}{x\log x}\right)$, $\forall \alpha > 0$. Dunque non è possibile stabilire, tramite il Corollario 2, se la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x\log x}$ sia integrabile o no in $[b,+\infty)$, $b > 1$. Ne abbiamo però stabilito la non integrabilità direttamente, nell'Esempio 5. Tale funzione, non essendo asintotica ad alcuna potenza $x^{-\alpha}$, può essere utilizzata come una ulteriore funzione campione, non integrabile, rispetto alla quale applicare i criteri di confronto sopra descritti.

Lo studio *a priori* dell'integrabilità ha senz'altro notevole importanza nel caso in cui la funzione non risulti integrabile. Infatti, in tal caso, una, a volte semplice, stima dell'andamento della funzione permette di evitare il conto esplicito dell'integrale, che può anche essere lungo, noioso e/o complicato. Ma si apprezza in pieno l'utilità del criterio del confronto asintotico nel caso in cui non sia possibile scrivere in forma esplicita le primitive della funzione integranda e, di conseguenza, non sia possibile calcolare esplicitamente l'integrale.

Esempio n. 11 Stabilire l'integrabilità in $I\!R$ della funzione $f(x) = e^{-x^2}$. Tale funzione, detta *funzione gaussiana*, assume una notevolissima importanza in Calcolo delle Probabilità e in Fisica (ad esempio, entra in gioco nella teoria degli errori di misura, ma anche in alcune leggi fisiche fondamentali). Essendo f simmetrica, sarà sufficiente studiarne l'integrabilità in $[0, +\infty)$.

Come si può evincere dalla figura sotto riportata, $e^{-x^2} \geq e^{-x}$ per $x \in [0, 1]$ e $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ per $x \in [1, +\infty)$. Spezziamo l' integrale nel seguente modo:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \int_0^1 e^{-x^2}\, dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \ .$$

Il primo integrale è senz'altro finito, in quanto integrale definito di funzione continua su un intervallo chiuso e limitato. Al secondo integrale si applica il criterio del confronto:

$$e^{-x^2} \leq e^{-x} \text{ in } [1, +\infty) \Rightarrow \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \leq \int_1^{+\infty} e^{-x}\, dx < +\infty \ .$$

Pertanto la funzione gaussiana risulta integrabile in $I\!R$.

Esiste un metodo semplice e astuto per calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$, ma richiede la conoscenza della teoria dell'integrazione generalizzata per funzioni di due variabili. Pertanto non lo riportiamo in queste note. Il lettore interessato può trovare la dimostrazione, ad esempio, in [BPS, pp. 474/475] e in [GRT, pp. 194/195]. Si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

e, per la simmetria della funzione,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \ .$$

Osservazione n. 6 Così come esistono serie numeriche assolutamente divergenti, ma convergenti, esistono anche funzioni assolutamente non integrabili, ma integrabili, come mostra il prossimo esempio.

Esempio n. 12 Studiare l'integrabilità della funzione $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ nell'intervallo $(0, +\infty)$. Poiché la funzione è prolungabile per continuità in 0, possiamo concludere che l'integrale della funzione nell'intervallo $(0, a]$, $0 < a < +\infty$, esiste finito. Studiamo pertanto l'integrale in $\left[\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right)$ (dove si è scelto $\frac{\pi}{2}$ solamente per utilità di calcolo), operando per parti:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{-\cos x}{x}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx \ .$$

Poiché $\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$, l'ultimo integrale converge in base al criterio di assoluta integrabilità. Dunque, la funzione $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ risulta integrabile nell'intervallo $(0, +\infty)$. Si può dimostrare che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \ .$$

Va osservato che, però, tale funzione non è assolutamente integrabile. La dimostrazione può essere trovata, ad esempio, in [EG, pp. 287/288] o in [GRT, pp. 200/201].

Esempio n. 13 Determinare l'integrabilità della funzione $f(x) = \sin(x^2)$ nell'intervallo $[0, +\infty)$. Riscriviamo l'integrale:

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\; dx \;=\; \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \sin(x^2)\; dx \;+\; \int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{+\infty} x \cdot \frac{\sin(x^2)}{x}\; dx$$

(dove si è scelto il punto $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ per opportunità di calcolo).

Osservato che il primo addendo esiste finito, in quanto integrale di funzione continua su un intervallo chiuso e limitato, studiamo il secondo integrale, operando per parti:

$$\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{+\infty} \frac{x \cdot \sin(x^2)}{x}\; dx \;=\; -\frac{1}{2}\cos(x^2) \cdot \frac{1}{x}\Big|_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{+\infty} \;-\; \frac{1}{2}\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{x^2}\; dx \;=\; -\frac{1}{2}\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{x^2}\; dx\;.$$

L'ultimo integrale converge, per il criterio di assoluta integrabilità, in quanto $\left|\dfrac{\cos(x^2)}{x^2}\right| \;\leq\; \dfrac{1}{x^2}$.

Esercizio n. 3 Determinare l'integrabilità della funzione $f(x) = \cos(x^2)$ nell'intervallo $[0, +\infty)$.

I due integrali esaminati

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\; dx \qquad ; \qquad \int_0^{+\infty} \cos(x^2)\; dx$$

sono detti *integrali di Fresnel* e intervengono nella teoria della diffrazione, in Ottica. Si può dimostrare che

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\; dx \;=\; \int_0^{+\infty} \cos(x^2)\; dx \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\;.$$

Esempio n. 14 Determinare l'integrabilità nell'intervallo $(0, 1]$ della funzione

$$f(x) \;=\; \frac{x^{3/2}}{\tan x \cdot \sqrt{x \sin x}}\;.$$

Sfruttando la catena di infinitesimi equivalenti (2), possiamo dire che, per $x \to 0$,

$$f(x) \;\sim\; \frac{x^{3/2}}{x \cdot \sqrt{x \cdot x}} \;=\; x^{\left(\frac{3}{2}-2\right)} \;=\; \frac{1}{\sqrt{x}}\;.$$

Essendo quest'ultima funzione integrabile in $(0, 1]$, anche la funzione in esame è integrabile in tale intervallo, in virtù del criterio del confronto asintotico.

BIBLIOGRAFIA

[Av] A. Avantaggiati - Analisi Matematica 1 - Ambrosiana - 1994.

[GCB] G.C. Barozzi - Matematica per l'Ingegneria dell'Informazione - Zanichelli - 2001.

[BPS] M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa - Matematica - Zanichelli - 2000.

[GRT] A. Ghizzetti, F. Rosati - Analisi Matematica 2 - Masson - 1993.

[GRE] A. Ghizzetti, F. Rosati - Esercizi e complementi di Analisi Matematica 2 - Masson - 1993.

[EG] E. Giusti - Analisi Matematica 1 - Libreria Scientifica G. Pellegrini - 1979.

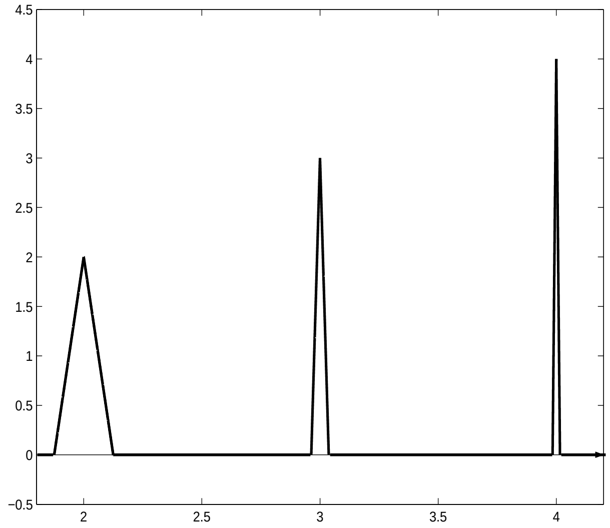

Figura 1

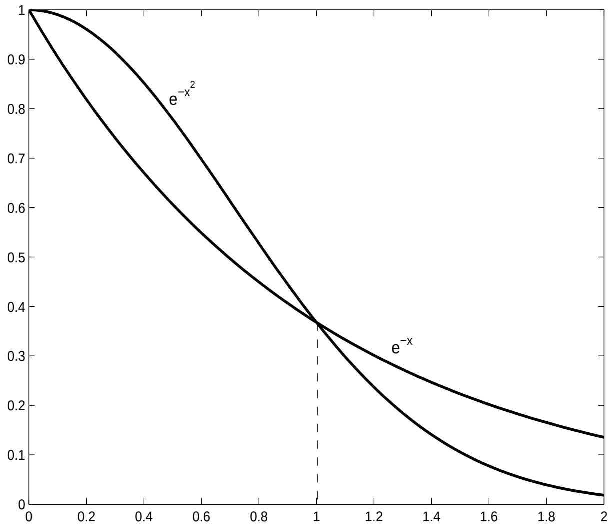

Figura 2

ESERCIZI DI VERIFICA

1) Dire se esiste il seguente integrale improprio e, in caso affermativo, calcolarlo:

$$I_1 \;=\; \int_0^1 e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\; dx \;.$$

Suggerimento: operare la sostituzione $t \;=\; \sqrt{x}$.
Risposta: integrabile. $I_1 = 2e$.

2) Dire quale delle due funzioni

$$f(x) \;=\; \frac{1}{x \cdot \sqrt{1-x^4}} \quad ; \quad g(x) \;=\; \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$$

è integrabile in $(0,1)$ e calcolarne l'integrale.
Risposta: $\displaystyle\int_0^1 g(x)\; dx = \frac{\pi}{4}$.

3) Dire se esiste l'integrale nell'intervallo $(0,+\infty)$ della funzione

$$f(x) \;=\; \frac{\sin x}{x^{1/3}(1+x)} \;.$$

Risposta: integrabile.

4) Discutere per quali valori del parametro reale α la funzione

$$f(x) \;=\; \frac{x^\alpha}{\sin x \cdot \sqrt[3]{x \cdot \tan x}}$$

è integrabile in $(0,1)$.
Risposta: $\alpha > \dfrac{2}{3}$.