ALCUNI INTEGRALI RISOLUBILI MEDIANTE SOSTITUZIONI PARTICOLARI

Intenderemo con $R(s,t)$ una generica funzione razionale di s e t.

Mostriamo il metodo risolutivo di cinque tipi di integrali.

1)

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\, dx \quad ; \quad a > 0 \ .$$

Sostituzione proposta:

$$x = a \sin t \quad ; \quad dx = a \cos t\, dt \quad ; \quad \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t \quad ; \quad t = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \ .$$

Esempio:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2 \int \cos^2 t\, dt\Big|_{t=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)} = \frac{a^2}{2}[t + \sin t \cos t]\Big|_{t=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)} + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\right] + C = \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + C \ .$$

2)

$$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})\, dx \quad ; \quad a > 0 \ .$$

Sostituzione proposta:

$$x = a \sinh t \quad ; \quad dx = a \cosh t\, dt \quad ; \quad \sqrt{a^2 + x^2} = a \cosh t \quad ; \quad t = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \log\left[\frac{1}{a}(x + \sqrt{x^2 + a^2})\right] \ .$$

Ricordiamo che

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \quad ; \quad \cosh(2t) = \cosh^2 t + \sinh^2 t \quad ; \quad \sinh(2t) = 2 \sinh t \cosh t \ ,$$

da cui

$$\cosh(2t) = \cosh^2 t + \sinh^2 t = 2\cosh^2 t - 1 = 1 + 2\sinh^2 t \ ,$$

da cui

$$\cosh^2 t = \frac{\cosh(2t) + 1}{2} \quad ; \quad \sinh^2 t = \frac{\cosh(2t) - 1}{2} \ .$$

Esempio:

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = a^2 \int \cosh^2 t\, dt\ \Big|_{t=\sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)=\log\left[\frac{1}{a}(x+\sqrt{x^2+a^2})\right]} =$$

$$= a^2 \int \left[\frac{\cosh(2t) + 1}{2}\right] dt\ \Big|_{t=\log\left[\frac{1}{a}(x+\sqrt{x^2+a^2})\right]} = a^2\left[\frac{1}{4}\sinh(2t) + \frac{1}{2}t\right]\Big|_{t=\log\left[\frac{1}{a}(x+\sqrt{x^2+a^2})\right]} + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}[\cosh t \sinh t + t]\Big|_{t=\log\left[\frac{1}{a}(x+\sqrt{x^2+a^2})\right]} + C = \frac{a^2}{2}\left\{\frac{1}{a}\sqrt{x^2 + a^2} \cdot \frac{x}{a} + \log\left[\frac{1}{a}(x + \sqrt{x^2 + a^2})\right]\right\} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{x \cdot \sqrt{x^2 + a^2} + a^2\ \log\left[\frac{1}{a}(x + \sqrt{x^2 + a^2})\right]\right\} + C = \frac{1}{2}\left[x \cdot \sqrt{x^2 + a^2} + a^2\ \log(x + \sqrt{x^2 + a^2})\right] + K \ .$$

Esempio:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \int \frac{a\cosh t}{a\cosh t}\,dt\,\Big|_{t=\log\left[\frac{1}{a}(x+\sqrt{x^2+a^2})\right]} = \int dt\,\Big|_{t=\log\left[\frac{1}{a}(x+\sqrt{x^2+a^2})\right]} =$$

$$= t\,\Big|_{t=\log\left[\frac{1}{a}(x+\sqrt{x^2+a^2})\right]} + C = \log\left[\frac{1}{a}(x+\sqrt{x^2+a^2})\right] + C = \log(x+\sqrt{x^2+a^2}) + K\ .$$

3)

$$\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})\,dx \quad ; \quad a>0\ .$$

Sostituzione proposta:

$$x = a\cosh t \quad ; \quad dx = a\sinh t\,dt \quad ; \quad \sqrt{x^2-a^2} = a\sinh t \quad ; \quad t = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \log\left[\frac{1}{a}(x+\sqrt{x^2-a^2})\right]\ .$$

Esempio:

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = a^2\int \sinh^2 t\,dt\,\Big|_{t=\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)=\log\left[\frac{1}{a}(x+\sqrt{x^2-a^2})\right]} =$$

$$= a^2\int\left[\frac{\cosh(2t)-1}{2}\right]dt\,\Big|_{t=\log\left[\frac{1}{a}(x+\sqrt{x^2-a^2})\right]} = a^2\left[\frac{1}{4}\sinh(2t)-\frac{1}{2}t\right]\Big|_{t=\log\left[\frac{1}{a}(x+\sqrt{x^2-a^2})\right]} =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\sinh t\cosh t - t\right]\Big|_{t=\log\left[\frac{1}{a}(x+\sqrt{x^2-a^2})\right]} = \frac{a^2}{2}\left\{\frac{1}{a}\sqrt{x^2-a^2}\cdot\frac{x}{a} - \log\left[\frac{1}{a}(x+\sqrt{x^2-a^2})\right]\right\} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{x\cdot\sqrt{x^2-a^2} - a^2\log\left[\frac{1}{a}(x+\sqrt{x^2-a^2})\right]\right\} + C = \frac{1}{2}\left[x\cdot\sqrt{x^2-a^2} - a^2\log(x+\sqrt{x^2-a^2})\right] + K\ .$$

Esempio:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \int \frac{a\sinh t}{a\sinh t}\,dt\,\Big|_{t=\log\left[\frac{1}{a}(x+\sqrt{x^2-a^2})\right]} = \int dt\,\Big|_{t=\log\left[\frac{1}{a}(x+\sqrt{x^2-a^2})\right]} =$$

$$= t\,\Big|_{t=\log\left[\frac{1}{a}(x+\sqrt{x^2-a^2})\right]} + C = \log\left[\frac{1}{a}(x+\sqrt{x^2-a^2})\right] + C = \log\left[x+\sqrt{x^2-a^2}\right] + K\ .$$

4)

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx$$

Sostituzione proposta:

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad ; \quad x = 2\arctan t \quad ; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

(dove le relazioni per il seno e il coseno sono ottenibili tramite le formule trigonometriche di duplicazione).

Esempio:

Risolviamo

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x}\, dx \ ,$$

ponendo $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Si ha, dopo alcune semplificazioni,

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x}\, dx \ = \ -2\int \frac{1}{t^2 - 2t - 1}\, dt \ = \ -2\int \frac{1}{(t-1-\sqrt{2})(t-1+\sqrt{2})}\, dt \ =$$

$$= \ \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left[\frac{1}{(t-1+\sqrt{2})} - \frac{1}{(t-1-\sqrt{2})} \right] dt \ =$$

$$= \ \frac{1}{\sqrt{2}} \log\left(\left| \frac{(t-1+\sqrt{2})}{(t-1-\sqrt{2})} \right| \right)_{t=\tan(x/2)} + C \ = \ \log\left(\left| \frac{\left[\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1 + \sqrt{2}\right]}{\left[\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1 - \sqrt{2}\right]} \right| \right) + C \ ,$$

dove si è riscritto il termine con polinomio di secondo grado a denominatore in forma di somma di due frazioni, per mezzo del metodo dei *fratti semplici* (si veda Flandoli, pp. 435/439).

5)

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \tan x)\ dx$$

Sostituzione proposta:

$$t = \tan x \quad ; \quad x = \arctan t \quad ; \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \quad ; \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \quad ; \quad dx = \frac{1}{1+t^2}\, dt \ .$$

Esempio:

Risolviamo

$$\int \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}\, dx \ ,$$

ponendo $t = \tan(x)$. Si ha

$$\int \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}\, dx \ = \ \int \frac{1}{\cos^2 x (1 + \tan x)^2}\, dx \ =$$

$$= \ \int (1+t^2) \cdot \frac{1}{(1+t)^2} \cdot \frac{1}{(1+t^2)}\, dt \Big|_{t=\tan(x)} \ = \ \int \frac{1}{(1+t)^2}\, dt \Big|_{t=\tan(x)} \ =$$

$$= \ -\frac{1}{(1+t)} \Big|_{t=\tan(x)} + C \ = \ -\frac{1}{[1+\tan(x)]} + C \ .$$

Si osservi che si sarebbe potuto calcolare tale integrale anche osservando direttamente che

$$\int \frac{1}{\cos^2 x (1+\tan x)^2}\, dx \ = \ \int \frac{1}{(1+\tan x)^2} \cdot (\tan x)'\, dx \ = \ -\frac{1}{[1+\tan(x)]} + C \ .$$

Esempio:

Risolviamo

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx\ ,$$

ponendo $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Si ha

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx \;=\; \int \frac{1}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt\Big|_{t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \;=$$

$$=\;\int \frac{1}{t}\,dt\Big|_{t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \;=\; [\log|t|+C]\Big|_{t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \;=\; \left\{\log\left|\left[\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right]\right|\right\}+C\ .$$

Si osservi che, anche in questo caso, si sarebbe potuto seguire una via alternativa, osservando che, per mezzo di semplici regole trigonometriche,

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx \;=\; \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx \;=\; \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx \;=\; -\int \frac{(\cos x)'}{1-\cos^2 x}\,dx \;=$$

$$=\;\int \frac{1}{t^2-1}\,dt\Big|_{t=\cos x} \;=\; \frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right]\,dt\Big|_{t=\cos x} \;=$$

$$=\;\frac{1}{2}\log\left(\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)+C\Big|_{t=\cos x} \;=\; \frac{1}{2}\log\left(\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|\right)+C\ ,$$

dove, nuovamente, si sono sfruttate le regole dei fratti semplici per riscrivere l'integrando, con a denominatore il polinomio di secondo grado, come somma di due frazioni. I due risultati, apparetemente differenti, forniscono le stesse primitive: è sufficiente utilizzare accuratamente le formule trigonometriche di duplicazione.