APPUNTI INTEGRATIVI SULLE SUCCESSIONI NUMERICHE

(Corollari dei) Teoremi di Cesàro

1). Data una successione $\{a_n\}$ generica, regolare, allora la successione delle *medie aritmetiche* $\mu_n := \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}$ è anch'essa regolare e risulta

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n \left(= \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} a_n \ .$$

2). Data una successione $\{a_n\}$ generica, regolare, con $a_n > 0 \ \forall n \in I\!N$, allora la successione delle *medie geometriche* $\gamma_n := (a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n)^{(1/n)}$ è anch'essa regolare e risulta

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n \left(= \lim_{n\to\infty} (a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n)^{(1/n)} \right) = \lim_{n\to\infty} a_n \ .$$

3). Data una successione $\{a_n\}$ generica, con $a_n > 0 \ \forall n \in I\!N$, se la successione dei rapporti $\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}$ è regolare, allora la successione delle radici $\{ \sqrt[n]{a_n} \}$ è anch'essa regolare e risulta

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \ .$$

Osservazioni sugli ordini di infinito

La sostituzione di infiniti o infinitesimi equivalenti ha senso qualora si abbia a che fare con prodotti o con quozienti. In tali casi, infatti, poiché $a_n \sim b_n \iff \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, possiamo scrivere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{b_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \cdot b_n \cdot c_n = \lim_{n\to\infty} b_n \cdot c_n \ .$$

Tali sostituzioni non possono essere fatte, in generale, quando si sia in presenza di somme algebriche.

Esempio 1).

$$a_n = \sqrt{n^2 + n} \ \sim \sqrt{n^2} \ = \ n \ .$$

Se operassimo tale approssimazione nella successione $b_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}$, otterremmo

$$b_n \ = \ \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n} \ \sim \ n^2 - n^2 \ = 0 \ .$$

In realtà, moltiplicando numeratore e denominatore per la somma delle radici, si ha

$$b_n \ = \ \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n} \ = \ \frac{(n^2 + n) - (n^2 - n)}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - n}} \ = \ \frac{2n}{n \left[\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right]} \to_{n\to\infty} \frac{2}{2} \ = \ 1 \ .$$

Ciò che accade è che, quando gli infiniti di ordine più alto (o gli infinitesimi di ordine più basso) si semplificano, si devono considerare gli infiniti (infinitesimi) di ordine successivo, i quali, pertanto, non possono essere trascurati, in questi casi.

La sostituzione fra infinitesimi o infiniti equivalenti non può nemmeno essere effettuata quando essi si trovano a esponente in un quoziente fra esponenziali. Infatti, se $a_n \sim b_n$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{a_n}}{e^{b_n}} \;=\; \lim_{n\to\infty} e^{a_n - b_n}$$

e, come già osservato, in una differenza non è, in generale, possibile sostituire a un infinito (o un infinitesimo) un altro ad esso equivalente.

Esempio 2). Sappiamo che $n^2 + n \sim n^2$, ma

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{n^2+n}}{e^{n^2}} \;=\; \lim_{n\to\infty} e^{(n^2+n)-n^2} \;=\; \lim_{n\to\infty} e^n \;=\; +\infty$$

Quindi, anche se $n^2 + n \sim n^2$, accade che

$$e^{n^2+n} \;>>\; e^{n^2} \;.$$

L'ordine di infinito, invece, viene rispettato negli esponenziali se $a_n >> b_n$. In tal caso, anche $e^{a_n} >> e^{b_n}$. Infatti

$$\frac{e^{a_n}}{e^{b_n}} \;=\; e^{a_n - b_n} \;=\; e^{a_n\left(1-\frac{b_n}{a_n}\right)} \;\sim\; e^{a_n} \to +\infty \;.$$

D'altra parte, i logaritmi mantengono l'equivalenza asintotica. Infatti, se $a_n \sim b_n$, qualora accadesse che, ad esempio, $\log(a_n) << \log(b_n)$, dovrebbe aversi (per quanto appena detto sugli esponenziali) anche

$$a_n \;=\; e^{\log(a_n)} \;<<\; e^{\log(b_n)} \;=\; b_n \;.$$

Al contrario, non è detto che logaritmi di infiniti di ordine diverso siano, in generale, essi stessi infiniti di ordine diverso.

Esempio 3). Anche se $n^\beta \;>>\; n^\alpha \quad \forall\, \beta > \alpha > 0$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(n^\beta\right)}{\log\left(n^\beta\right)} \; \lim_{n\to\infty} \frac{\beta \log n}{\alpha \log n} \;=\; \frac{\beta}{\alpha} \;,$$

cioè $\log\left(n^\beta\right)$ e $\log\left(n^\alpha\right)$ hanno stesso ordine di infinito.

Esempio 3). Sappiamo che $n^n \;>>\; n!$. Poiché

$$n! \;\sim\; \frac{n^n}{e^n} \cdot \sqrt{2\pi n} \;,$$

possiamo dire che

$$\log(n!) \;\sim\; \log\left[\frac{n^n}{e^n} \cdot \sqrt{2\pi n}\right] \;=\; \log(n^n) - \log(e^n) + \frac{1}{2}\log(2\pi n) \;=\; n\log n - n + \frac{1}{2}\log n + \frac{1}{2}\log(2\pi)$$

da cui

$$\frac{\log(n!)}{\log(n^n)} \;=\; \frac{n\log n - n + \frac{1}{2}\log n + \frac{1}{2}\log(2\pi)}{n\log n} \;= 1 - \frac{1}{\log n} + \frac{1}{2n} + \frac{\frac{1}{2}\log(2\pi)}{n\log n} \longrightarrow 1 \quad \text{se} \quad n \to \infty \;.$$

Dunque, benché $n! << n^n$, si ha

$$\log(n!) \;\sim\; \log(n^n) \;.$$