

SVOLGIMENTI PROVA D'ESONERO
di ANALISI 2 DEL 9/5/2025

①

1° TURNO

1) $\varphi_n(x) = \frac{(e^x - 1)^n}{n}$ è definita in $\mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow D_c = \mathbb{R}$

Descriviamo la serie: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n (e^x - 1)^n}{n}$
 $= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n [(1 - e^x)^n]}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} (1 - e^x)^n}{n}$

Poniamo $t = 1 - e^x$:

$-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^n}{n}$ è la serie logaritmica.

$D_{cp} = (-1, 1]$; $D_{ca} = (-1, 1)$

$D_{cu} = [-1 + \varepsilon; 1]$; $0 < \varepsilon < 2$

$D_{ct} = [a, b]$; $-1 < a < b < 1$.

$S(t) = -\ln(1+t)$ $\forall t \in (-1, 1]$

$\Rightarrow S(x) = -\ln(2 - e^x)$

Pertanto si ha convergenza puntuale se

$-1 < 1 - e^x \leq 1 \Leftrightarrow 1 > e^x - 1 \geq -1$

$\Leftrightarrow 2 > e^x \geq 0 \Leftrightarrow x < \ln 2$.

Analogo risultato si ottiene per la convergenza assoluta:

$$D_{cp} = D_{ca} = (-\infty, \ln 2).$$

②

Gli intervalli di convergenza uniforme e totale potrebbero essere ottenuti con un po' di intuito, ma i conti sono in ogni caso agevoli:

CONV. UNIFORME:

$$-1 + \varepsilon \leq 1 - e^x \leq 1$$

$$0 < \varepsilon < 2$$

$$1 - \varepsilon \geq e^x - 1 \geq -1$$

$$2 - \varepsilon \geq e^x \geq 0$$

$$x \leq \ln(2 - \varepsilon)$$

$$\forall 0 < \varepsilon < 2$$

Questo corrisponde ad avere

$$D_{cu} = (-\infty, h] \quad \forall h < \ln 2.$$

CONV. TOTALE:

$$a \leq 1 - e^x \leq b$$

$$; \quad -1 < a < b < 1$$

$$-a \geq e^x - 1 \geq -b$$

$$1 - a \geq e^x \geq 1 - b$$

$$\ln(1 - a) \geq x \geq \ln(1 - b)$$

Questo corrisponde ad avere

$$D_{ct} = [\alpha, \beta]$$

$$-\infty < \alpha < \beta < \ln 2$$

$$2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x,y)| = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{xy(x-y)}{x^2+y^2} \right| \quad (3)$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 |\cos \vartheta \sin \vartheta (\cos \vartheta - \sin \vartheta)|}{\rho^2}$$

$$\leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho (|\cos \vartheta| + |\sin \vartheta|) \leq 2 \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho = 0$$

uniformemente rispetto a ϑ .

$$f(0,y) = f(x,0) = 0 \Rightarrow f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0.$$

DER. D/R.: $\frac{df(0,0)}{d\vec{v}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha \beta t^3 (\alpha - \beta)}{t^3} = \alpha \beta (\alpha - \beta)$

$\forall \vec{v} = (\alpha, \beta)$

Poiché non vale la formula del gradiente,
 f NON è differenziabile.

Infatti: $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{hk \arctg(h-k)}{(h^2+k^2)^{3/2}} =$

$$= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{hk(h-k)}{(h^2+k^2)^{3/2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \cos \vartheta \sin \vartheta (\cos \vartheta - \sin \vartheta)}{\rho^3}$$

Quindi il limite non esiste.

Saremmo potuti giungere alle stesse conclusioni osservando che la funzione asintoticamente equivalente ad f è omogenea di grado 1. Non essendo differenziabile in $(0,0)$ f non è di classe C^1 .

3) Si osserva subito che $x=1+y$

Quindi γ è piano. $\vec{B} = \pm(1, -1, 0)$

$$\Rightarrow \hat{B} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0). \Rightarrow \underline{\tau = 0.}$$

$$\gamma': \begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = 1 \\ z'(t) = -e^{-t} \end{cases}; \quad \gamma'': \begin{cases} x''(t) = 0 \\ y''(t) = 0 \\ z''(t) = e^{-t} \end{cases}$$

$$\vec{r}' \wedge \vec{r}'' = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -e^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{vmatrix} = (e^{-t}, -e^{-t}, 0)$$

$$\Rightarrow \hat{B} = \frac{1}{\sqrt{2e^{-2t}}}(e^{-t}, -e^{-t}, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0).$$

$$v(t) = \sqrt{2 + e^{-2t}} > 0 \quad \forall t \Rightarrow \gamma \text{ è regolare}$$

$$\underline{k(t)} = \frac{\|\vec{r}' \wedge \vec{r}''\|}{v^3(t)} = \frac{\sqrt{2}e^{-t}}{(2 + e^{-2t})^{3/2}}$$

$$\hat{T} = \frac{1}{\sqrt{2 + e^{-2t}}}(1, 1, -e^{-t})$$

$$\underline{\hat{N}} = \hat{B} \wedge \hat{T} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -e^{-t} \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2(2 + e^{-2t})}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(2 + e^{-2t})}}(e^{-t}, e^{-t}, 2)$$

4

$$l(x) = \int_0^{+\infty} \sqrt{2+e^{-2t}} dt \geq \int_0^{+\infty} \sqrt{2} dt = +\infty \quad (5)$$

Quindi la lunghezza è infinita