

SVOLGIMENTI PROVA D'ESONERO
di ANALISI 2 DEL 9/5/2025

①

20 TURNO

1) $\varphi_n(x) = (-1)^{2n+1} (1 - e^{+x})^n$ è definita in $\mathbb{R}$,
 $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow D_c = \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(x) = - \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - e^{+x})^n$$

Poniamo $t = 1 - e^{+x} \Rightarrow - \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ (SERIE GEOMETRICA)

$$D_{cp} = D_{ca} = (-1, 1) ; D_{cu} = D_{ct} = [a, b] \quad \forall -1 < a < b < 1.$$

$$S(t) = - \frac{1}{1-t} = \frac{1}{t-1} \quad \forall t \in (-1, 1) \Rightarrow S(x) = \frac{1}{1 - e^x - 1} = -e^{-x}$$

Pertanto si ha convergenza puntuale ~~se~~
e assoluta se

$$-1 < 1 - e^x < 1 \Leftrightarrow 1 > e^x - 1 > -1$$

$$\Leftrightarrow 2 > e^x > 0 \Leftrightarrow x < \ln 2$$

Pertanto $D_{cp} = D_{ca} = (-\infty, \ln 2)$

Gli intervalli di convergenza totale e uniforme
si possono ottenere in modo intuitivo, ma i conti

Sono in ogni caso semplici:

(2)

$$a \leq 1 - e^x \leq b \iff -a \geq e^x - 1 \geq -b$$

$$\iff 1-a \geq e^x \geq 1-b \iff$$

$$\ln(1-a) \geq x \geq \ln(1-b) \quad \forall -1 < a < b < 1$$

Questo corrisponde a dire che

$$D_{cv} = D_{cr} = [\alpha, \beta] \quad \forall -\infty < \alpha < \beta < \ln 2$$

$$2) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x,y)| = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 |x+y|}{x^2+y^2} =$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \cos^2 \vartheta |\cos \vartheta + \sin \vartheta|}{\rho^2} \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho [|\cos \vartheta| + |\sin \vartheta|]$$

$$\leq 2 \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho = 0 \quad \text{uniformemente rispetto a } \vartheta.$$

$$f(0,y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow f_y(0,0) = 0.$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(h)}{h^2 \cdot h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h^3} = 1.$$

$$\frac{df}{d\vec{w}}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha^2 t^2 \sin[t(\alpha+\beta)]}{t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha^2 t(\alpha+\beta)}{t}$$

$$= \alpha^2(\alpha+\beta).$$

Poiché non vale la formula del gradiente, f NON è differenziabile nell'origine.

Non essendo differenziabile, non è neanche C^1

3) Osserveremo subito che $x = z + y$ (3)

$\Rightarrow \gamma$ è piano: $\vec{B} = \pm (1, -1, 0) \Rightarrow$
 $\vec{B} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1, 0)$ $\underline{z=0}$

$$\gamma: \begin{cases} x'(t) = -e^{-t} \\ y'(t) = -e^{-t} \\ z'(t) = 1 \end{cases} ; \gamma'': \begin{cases} x''(t) = e^{-t} \\ y''(t) = e^{-t} \\ z''(t) = 0 \end{cases}$$

$$v(t) = \sqrt{1 + 2e^{-2t}} > 0 \quad \forall t \Rightarrow \gamma \text{ è regolare.}$$

$$\vec{\gamma}' \wedge \vec{\gamma}'' = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -e^{-t} & -e^{-t} & 1 \\ e^{-t} & e^{-t} & 0 \end{vmatrix} = (-e^{-t}, e^{-t}, 0)$$

$$\Rightarrow \hat{B} = \frac{1}{\sqrt{2e^{-2t}}} (-e^{-t}, e^{-t}, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 1, 0)$$

$$\hat{T} = \frac{1}{\sqrt{1+2e^{-2t}}} (-e^{-t}, -e^{-t}, 1)$$

$$\hat{N} = \hat{B} \wedge \hat{T} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -e^{-t} & -e^{-t} & 1 \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2(1+2e^{-2t})}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(1+2e^{-2t})}} (1, 1, 2e^{-t})$$

$$k(t) = \frac{\|\vec{z}' \wedge \vec{z}''\|}{v^3(t)} = \frac{\sqrt{2} e^{-2t}}{(1+2e^{-2t})^{3/2}} = \frac{\sqrt{2} e^{-t}}{(1+2e^{-2t})^{3/2}}$$

$$e(s) = \int_0^{+\infty} \sqrt{1+2e^{-2t}} dt \geq \int_0^{+\infty} 1 dt = +\infty$$

(4)

Quindi la lunghezza è infinita.