SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA

di ANALISI MAT. 1 — 9/9/2016

1

1) $y' + y = \frac{e^{-x} \log x}{x}$ definita in $(0, +\infty)$.

INT. GENERALE:

$$y(x) = e^{-x} \left[\int \cancel{e^{x}} \cdot \cancel{e^{-x}} \frac{\log x}{x} \, dx + C \right]$$

$$= e^{-x} \left[\frac{\log^2 x}{2} + C \right]$$

Poichè $\lim_{x \to +\infty} C e^{-x} = 0 \quad \forall C \in \mathbb{R}$

e $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} \frac{\log^2 x}{2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log^2 x}{2 e^{x}} = 0$

(ordini di infinito) allora il primo problema NON AMMETTE SOLUZIONI.
Il secondo problema ammette INFINITE SOLUZIONI:

$$y(x) = e^{-x} \left(\frac{\log^2 x}{2} + C \right) \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

Entrambi i casi NON contraddicono il Teorema di Esistenza e Unicità, perchè non si tratta di problemi di Cauchy, ma di problemi ai limiti.

2) $z^4 = -8 - 8\sqrt{3}\,i$

$$|-8-8\sqrt{3}\,i| = 16$$

$$\Rightarrow -8-8\sqrt{3}\,i = 16\left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$$

$$= 16\left[\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right]$$

$$z = \sqrt[4]{16\left[\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right]}$$

$$\Rightarrow z_0 = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right] = \sqrt{3} - i$$

$$z_1 = 2\left[\cos\left(\frac{-\frac{2}{3}\pi + 2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{2}{3}\pi + 2\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right] = 1 + \sqrt{3}\,i$$

③

$$z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{-\frac{2}{3}\pi+4\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{2}{3}\pi+4\pi}{4}\right)\right]$$

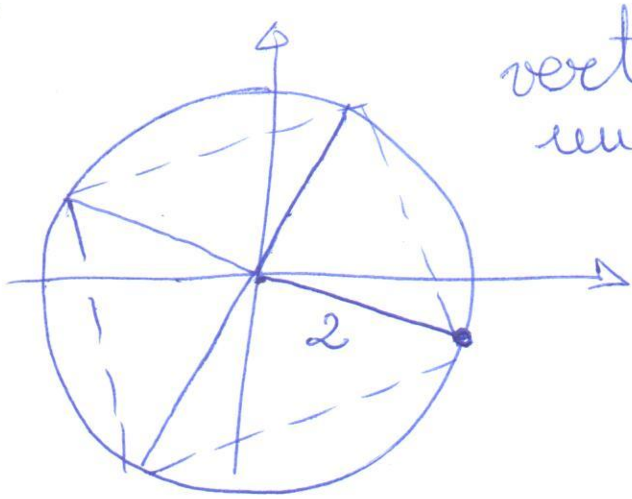
$$= 2\left[\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right] = 2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right]$$

$$= -\sqrt{3} + i$$

$$z_3 = 2\left[\cos\left(\frac{-\frac{2}{3}\pi+6\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{2}{3}\pi+6\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 2\left[\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right] = 2\left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$$

$$= -1 - \sqrt{3}i$$



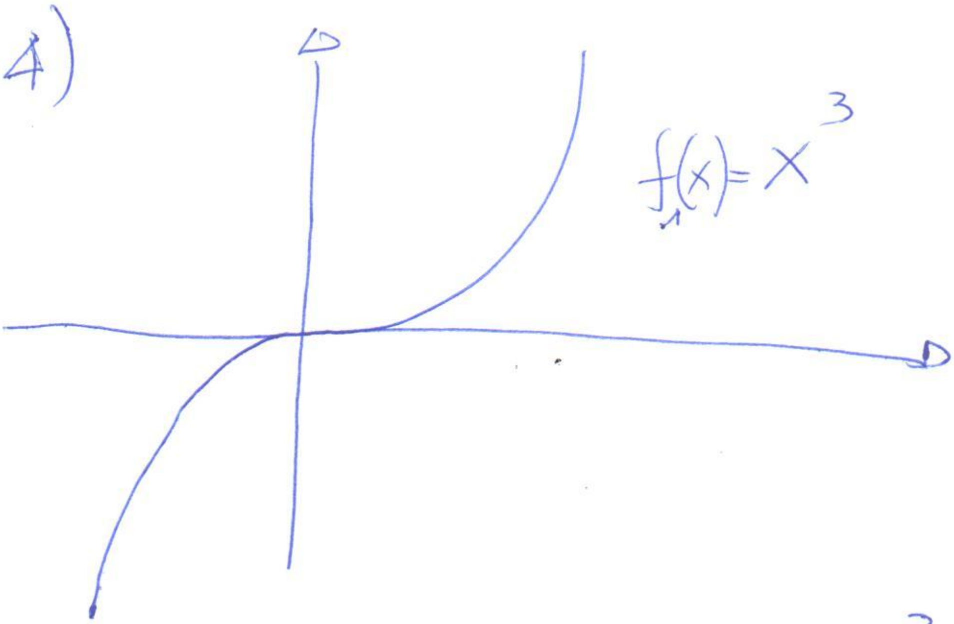
vertici di un quadrato

3) $$a_n = \frac{7^n + n^{115} - n\log n}{n! + 5^n + n^{42}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{7^n}{n!}$$

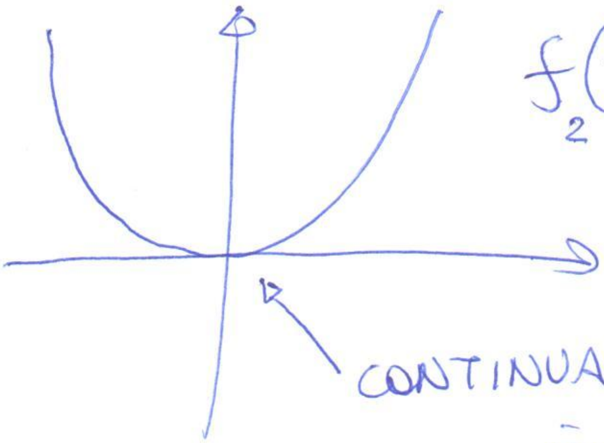
$\sum \frac{7^n}{n!}$ converge (converge ogni serie della forma $\sum \frac{a^n}{n!}$)

$\Rightarrow$ converge anche la serie proposta.

4)



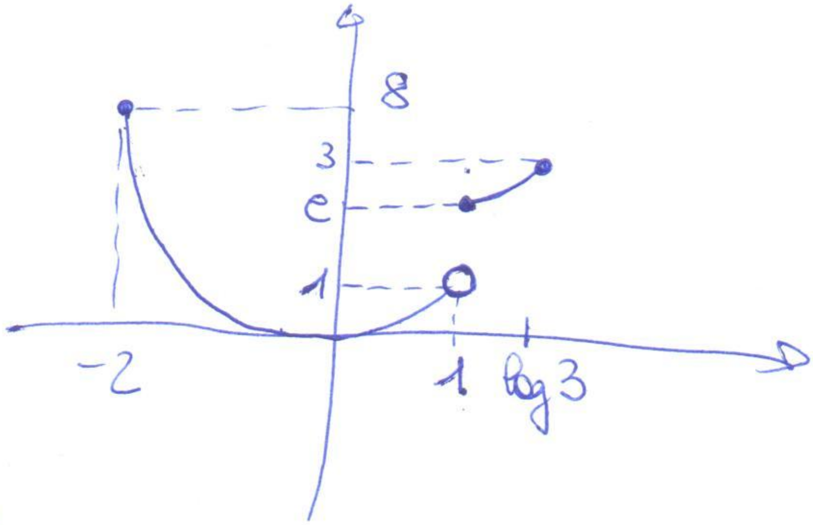
$f_1(x) = x^3$



$f_2(x) = |x|^3$

CONTINUA e DERIVABILE in $x = 0$.

$f(x)$:



$e^{\log 3} = 3$

Ne segue che $x = -2$ è punto di MAX. ASS. ($f(-2) = 8$).

$x = 0$ è punto di MIN. ASS.

$x = \log 3$ è punto di MAX. REL.

Il punto $x = 1$ NON È PUNTO DI MAX, NÉ DI MIN., perché in ogni suo intorno esistono punti in cui $f(x) < f(1) = e$ e punti in cui $f(x) > f(1) = e$.

f ~~d~~discontinua solo in $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} |x^3| = 1 \neq \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = e.$$

f derivabile in ogni punto in cui f è continua.