SVOLIMENTI ESONERO di ANALISI 1
del 19/11/2024 - COMPITO C

C_1

1) $e^{\frac{1}{n^2}}-1 \sim \frac{1}{n^2}$ per $n \to +\infty$.

Pertanto
$$\sum a_n \approx \sum n^{\alpha}\left(\frac{1}{n^2}\right)^2 = \sum \frac{1}{n^{4-\alpha}}$$

La serie converge se $4-\alpha>1$ cioè $\alpha<3$.
La serie diverge se $\alpha \geq 3$.

2) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = C$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2}{\frac{\pi}{2}x^2} = \frac{4}{\pi}$$

~~Pertanto~~ $\cancel{\lim_{x\to 0^+} f(x)}$ in quanto
$$\sin(\varepsilon(x)) \sim \varepsilon(x)$$
$$\ln(1+\varepsilon(x)) \sim \varepsilon(x)$$
per $\varepsilon(x) \to 0$.

Pertanto $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) \iff C = \frac{4}{\pi}$.

La prolungata per continuità è
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{4}{\pi} & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

C_2

3) $z \neq 0$

$$\left|\frac{1+iz}{z}\right| \le 1 \iff |1+iz| \le |z|$$

$$\iff |1+i(x+iy)| \le |x+iy|$$

$$\iff |1-y+ix| \le |x+iy|$$

Poichè ambo i membri sono reali non negativi, eleviamo al quadrato:

$$(1-y)^2+x^2 \le x^2+y^2$$

$$\iff 1+\cancel{y^2}-2y+\cancel{x^2} \le \cancel{x^2}+\cancel{y^2} \iff y \ge \frac{1}{2}$$

Nel piano di Gauss, l'insieme delle soluzioni è il semipiano superiore