SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA DI ANALISI 1 DEL 1°/7/2026

1) $$a_n = \left[\frac{1}{2}\left(2+\frac{3}{n}\right)\right]^n = \left(1+\frac{3}{2n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\frac{3}{2}}.$$

Poiché $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \not\to 0$, la serie, a termini positivi, diverge.

2) $D = \{|x^2| \le 1\} = \{-1 \le x \le 1\}$

$f(x) \ge 0 \quad \forall x \in D$, perché $\arcsin(t) \ge 0 \iff t \ge 0$.

f PARI: $f(-x) = \arcsin[(-x)^2] = \arcsin(x^2) = f(x)$.

$f(0) = 0$; inoltre $f(x) = 0 \iff x = 0$.

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} \ge 0 \iff x \ge 0$$

f decresce in $[-1, 0)$ e cresce in $(0, 1]$.

$x = 0$ punto di MIN. ASSOLUTO.

$x = \pm 1$ punti di MAX. ASSOLUTO:

$$f(\pm 1) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

f non è derivabile in $x = \pm 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$ Per simmetria,

$\lim_{x\to -1^+} f'(x) = -\infty$.

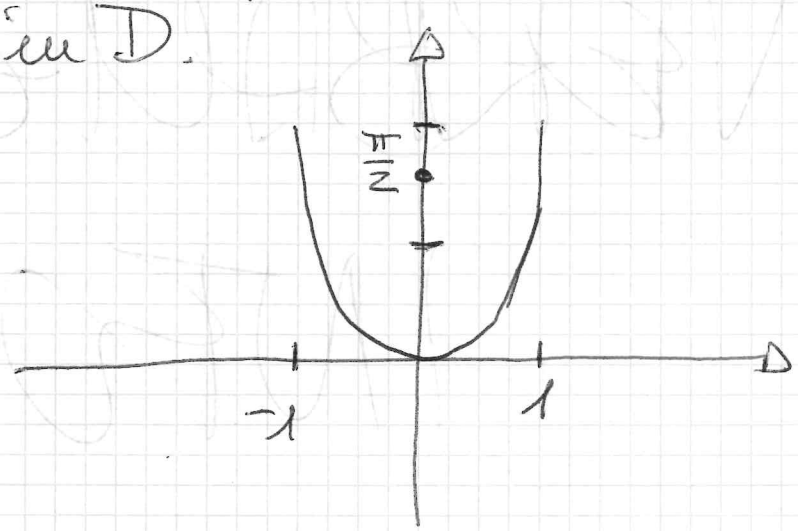
$$f''(x) = 2\left[\frac{\sqrt{1-x^4} + x\dfrac{4x^3}{2\sqrt{1-x^4}}}{(1-x^4)}\right]$$

$$= \frac{2}{(1-x^4)^{3/2}}\left[1-x^4+2x^4\right] = \frac{2(1+x^4)}{(1-x^4)^{3/2}} > 0$$

$\forall x \in (-1,1)$.

f è convessa in D.

Grafico:



3) $z = (-1+i)^2(1+i)^2(-1+i)$

$$= \left[(-1+i)(1+i)\right]^2(-1+i) = \left[-1-1\right]^2(-1+i)$$

$$= 4\left[-1+i\right] = 4\sqrt{2}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= 4\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right]$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{4\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{3}\right)\right]$$

$k = 0, 1, 2$

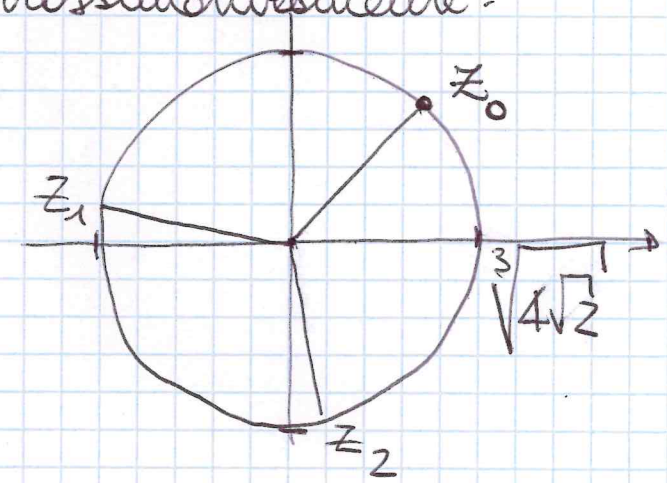
$$\left(\sqrt[3]{z}\right)_0 = \sqrt[3]{4\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= \sqrt[3]{4\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}+i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \sqrt[3]{2}\,(1+i)$$

$$\left(\sqrt[3]{z}\right)_1 = \sqrt[3]{4\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right]$$

$$\left(\sqrt[3]{z}\right)_2 = \sqrt[3]{4\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{19}{12}\pi\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{19}{12}\pi\right)\right]$$

Approssimativamente:



4) Equazione a variabili separabili; definita per $x>0$.

$B(y)=e^y \in C^\infty(\mathbb{R})$; $A(x)=\ln x \in C^\infty((0,+\infty))$

$\exists!$ soluzione locale $y \in C^1$. La soluzione è locale, in quanto l'equazione è a variabili separabili.

Poiché $B(y)>0 \ \forall y\in\mathbb{R} \Rightarrow \nexists$ sol. singolari

$$\int e^{-y}\,dy = \int \ln x\,dx$$

$$-e^{-y} = x(\ln x - 1) + C$$

$$e^{-y} = -x(\ln x - 1) - C$$

$$-y = \ln\left[-x(\ln x - 1) - C\right]$$

$$y = -\ln\left[-x(\ln x - 1) - C\right]$$

$y(1) = 0 \Rightarrow \ln\left[1 - C\right] = 0$

$\Rightarrow C = 0 \Rightarrow y = -\ln\left[x(1 - \ln x)\right]$

N.B.: la soluzione è definita per $x(1-\ln x) > 0$

ovvero $x(\ln x - 1) < 0$, cioè $\ln x < 1$,

ovvero $0 < x < e$, a riprova della natura LOCALE della soluzione.

5) $\operatorname{sen}(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$

$\ln(1+x^6) = x^6 + o(x^6)$

$\operatorname{sen}(x^\alpha) = x^\alpha - \frac{x^{3\alpha}}{6} + o(x^{3\alpha})$ per $\alpha > 0$

Per $\alpha > 0$:

(5)

$$f(x)=\frac{\cancel{x^2}-\cancel{x^3}+\frac{x^6}{6}-x^6+o(x^6)}{\cancel{x^\alpha}-\frac{x^{3\alpha}}{6}-\cancel{x^\alpha}+o(x^{3\alpha})}$$

$$\underset{x\to 0^+}{\sim}\frac{-\frac{5}{6}x^6}{-\frac{x^{3\alpha}}{6}}=\frac{5}{x^{3\alpha-6}}$$ integrabile in $(0,1]$

per $3\alpha-6<1$

$\Leftrightarrow 0<\alpha<\frac{7}{3}$

Per $\alpha=0$: $f(x)=\frac{-\frac{5}{6}x^6+o(x^6)}{\sin 1-1}$ integrabile.

Pertanto f è integrabile in $(0,1]$ $\forall \alpha\in[0,\frac{7}{3}]$