SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI 1 del 3/9/2025

1)
$$a_n = \left(1+\frac{1}{e^n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{e^n}\right)^{e^n}\right]^{\frac{n}{e^n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{e^n}\right)^{e^n}\right]^{\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{e^n}}$$
$$= e^0 = 1$$

Poichè $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1 \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ diverge.

2) $I_{def} = \{x\in\mathbb{R} \mid x^3+1 \geq 0\} = \{x^3 \geq -1\}$
$= \{x \geq -1\} = [-1, +\infty)$

$f \in C^0(I_{def})$.

~~INTERS~~ OVVIAMENTE, poichè I_{def} non è simmetrico rispetto allo 0, f NON PUÒ ESSERE PARI, NÈ DISPARI.

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in I_{def}$

$f(0) = 1$

$f(x) = 0 \iff x^3+1 = 0 \iff x = -1$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ Poichè $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^{3/2}$ (funzione superlineare), allora NON C'È ASINTOTO OBLIQUO.

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} \geq 0 \quad \forall x \in I_{def}$$

$f'(x)=0 \iff x=0$. Poiché f è sempre non decrescente, allora $x=0$ è punto di flesso orizzontale.

$$\lim_{x\to -1^+} f'(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} = \frac{3}{2\cdot 0^+} = +\infty$$

$x=-1$ punto di non derivabilità.

Poiché $f(x) \geq 0 \ \forall x \in I_{def}$, $f(-1)=0$

e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow x=-1$ punto di MIN. ASS.

$\nexists$ punti di MAX. REL. e ASS.

$$f''(x) = \frac{3}{2}\left[\frac{2x\sqrt{x^3+1} - \frac{3x^4}{2\sqrt{x^3+1}}}{(x^3+1)}\right]$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{4x(x^3+1)-3x^4}{2(x^3+1)^{3/2}}\right] = \frac{3}{4}\frac{x(x^3+4)}{(x^3+1)^{3/2}}$$

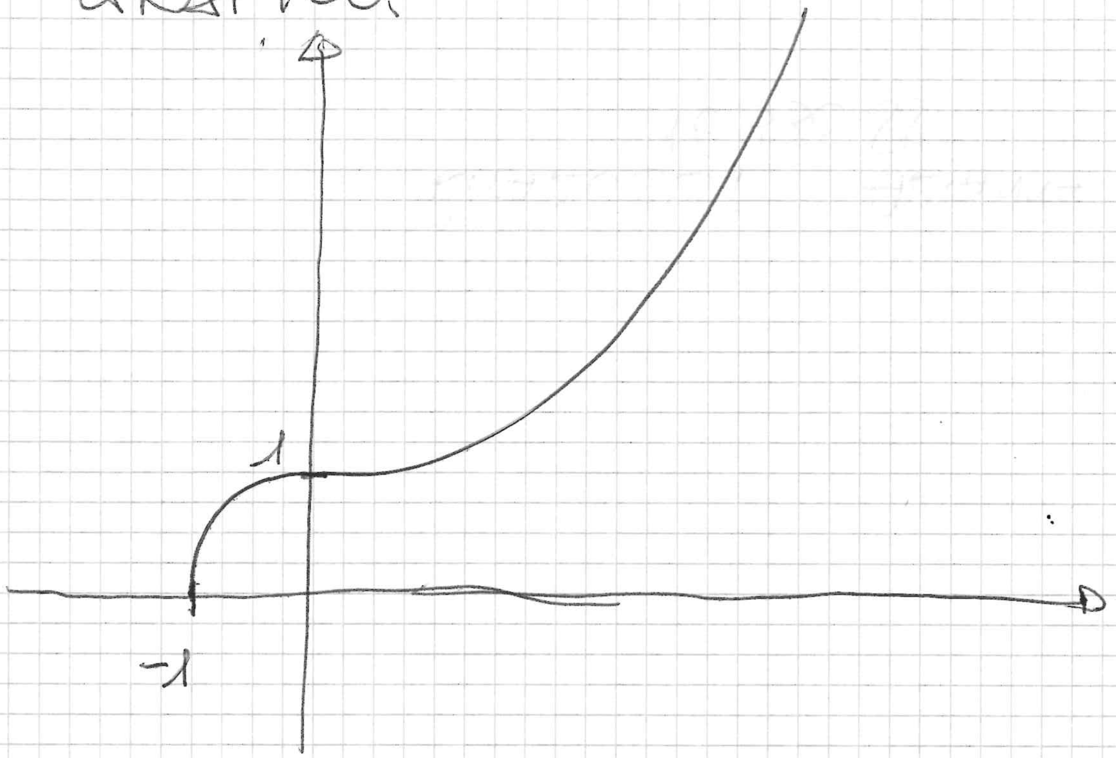
N.B.: $x^3+4 \geq 0 \iff x^3 \geq -4 \iff x \geq -\sqrt[3]{4}$

sempre verificato $\forall x \in I_{def}$

$\Rightarrow f''(x) \geq 0 \iff x \geq 0$

Quindi $x=0$ punto di flesso (orizzontale, come già osservato). f concava in $[-1, 0)$ e convessa in $(0, +\infty)$.

GRAFICO:



3) $$z^4 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$$

METODO a): $$1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$\sqrt{3}+i = 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right] = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$\Rightarrow z^4 = \frac{\cancel{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]}{\cancel{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\Rightarrow z = e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{4}\right)}, \quad k=0,1,2,3$$

$$= e^{i\left(\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow z_0 = e^{i\frac{\pi}{24}}; \quad z_1 = e^{i\frac{13}{24}\pi}; \quad z_2 = e^{i\frac{25}{24}\pi}$$

$$z_3 = e^{i\frac{37}{24}\pi}.$$

METODO b): $$z^4 = \frac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-i+3i+\sqrt{3}}{3+1} = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Il proseguo dell'esercizio è identico al metodo a).

4) Con i polinomi di McLaurin:

$$f(x) = \frac{x\left(1 - \cancel{x} + \frac{x^2}{2} - \cancel{\frac{x^3}{6}} + o(x^3)\right) + \cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \cancel{\frac{x^3}{6}} + o(x^3)\Big) \cancel{+1} - x + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^3}{6} \cancel{-1} - x - \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3}$$

$$= \frac{\cancel{2x} + \frac{x^3}{\cancel{2}} + o(x^4) \cancel{-2x} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3}$$

$$= \frac{x^3\left(\frac{1}{\cancel{4}} - \frac{1}{3}\right) + o(x^3)}{x^3} = \frac{\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{2}{3}$$

Il numeratore ha ordine di infinitesimo 3.

Con il Teorema di de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(-e^{-x}+e^{x})x \cancel{+e^{-x}} \cancel{+e^{x}} \cancel{-e^{-x}} \cancel{-e^{x}}}{3x^2}$$

$$\cancel{= \frac{0}{0} =} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^{-x}+e^{x}}{3x} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}+e^{x}}{3}$$

$$= \frac{2}{3}.$$

(5)

Si può anche applicare una sola volta il teorema:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-e^{-x}+e^{x}}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\,\mathrm{Sh}\,x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

1

5) $\dfrac{x+3}{x^3-3x^2} = \dfrac{x+3}{x^2(x-3)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x-3}$ 6

$$= \frac{Ax(x-3)+B(x-3)+Cx^2}{x^2(x-3)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ -3A+B=1 \\ -3B=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-1 \\ -3A=1-B=2 \\ C=-A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-1 \\ A=-\frac{2}{3} \\ C=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{x+3}{x^3-3x^2}\,dx = \int_1^2 \left[-\frac{2}{3x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{3(x-3)}\right] dx$$

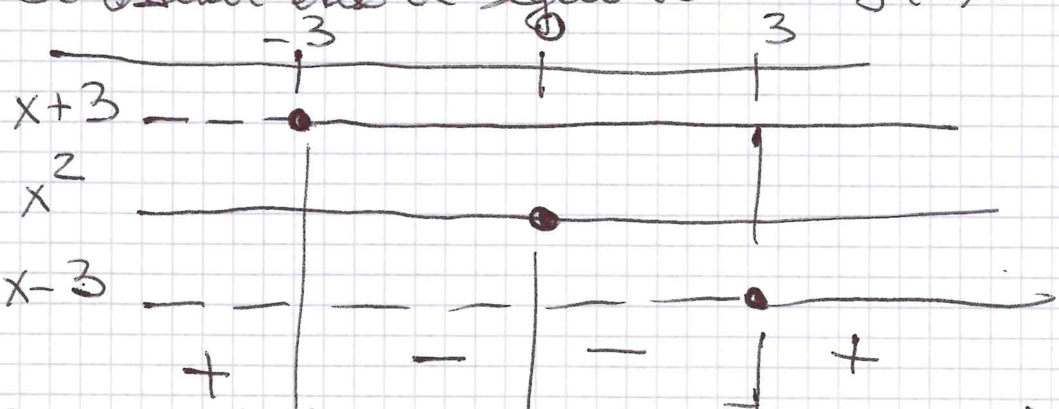
$$= \left[-\frac{2}{3}\ln(|x|) + \frac{1}{x} + \frac{2}{3}\ln(|x-3|)\right]_1^2$$

$$= \left[-\frac{2}{3}\left[\ln 2\right] + \frac{1}{2} - 1 + \frac{2}{3}\ln(|-1|) - \frac{2}{3}\ln(|-2|)\right]$$

$$= -\frac{2}{3}\ln 2 - \frac{1}{2} + \cancel{\frac{2}{3}\ln 1} - \frac{2}{3}\ln 2$$

$$= -\frac{4}{3}\ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Si osservi ~~che~~ il segno della $f(x)$:



Quindi $f(x) < 0$ in $[1,2]$ e quindi l'integrale è negativo.