SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI 1 del 10/7/2018

1) a) L'equazione si riscrive nella forma

$$y(1-x^2)y' = -x(y^2+1)$$

da cui

$$y' = \left(\frac{-x}{1-x^2}\right)\left(\frac{y^2+1}{y}\right)$$

Segue che l'equazione è definita per

$x \neq \pm 1$; $y \neq 0$.

~~Poiché il Problema~~

Inoltre, poiché $y^2+1>0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$,

NON ESISTONO SOL. SINGOLARI.

Integriamo:

$$\int \frac{y}{y^2+1}\,dy = \int \frac{-x}{1-x^2}\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\log(y^2+1) = +\frac{1}{2}\log(|1-x^2|) + C$$

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{y^2+1}{|1-x^2|}\right) = C$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y^2+1}{|1-x^2|} = e^{2c}$$

da cui

$$y^2+1 = |1-x^2|\, e^{2c}$$

$$y = \pm\sqrt{|1-x^2|\, e^{2c} - 1}\,.$$

b) Poiché $x_0 = \sqrt{2}$; $y_0 = \sqrt{e-1}$,

considereremo le soluzioni POSITIVE nell'intervallo $(1, +\infty)$

$$A(x) = \frac{-x}{1-x^2} \in C^\infty(1,+\infty)$$

$$B'(y) = \left(y + \frac{1}{y}\right)' = 1 - \frac{1}{y^2} \in C^\infty(0,+\infty)$$

$\Rightarrow \exists I(\sqrt{2})$ t.c. $\exists!$ sol. $y \in C^1(I)$ (soluzione locale).

c) Come detto, considereremo $x > 1$; $y > 0$

$$\Rightarrow \quad y = \sqrt{(x^2-1)\, e^{2c} - 1}$$

$$y(\sqrt{2}) = \sqrt{e^{2c} - 1} = \sqrt{e-1}$$

$$\Rightarrow \quad c = \frac{1}{2}.$$

$\Rightarrow \; y(x) = \sqrt{e(x^2-1)-1}$.

Si osservi che la soluzione trovata è definita e C^1

$$\forall x > \sqrt{1+\frac{1}{e}}.$$

2) a) $f(x) \geq 0 \iff x+1 \geq 1 \iff x \geq 0$

quindi $f(x) \leq 0$ in $(-1, 0]$.

b) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{(x+1)^{1/2}} \xrightarrow[x \to -1^+]{} \dfrac{-\infty}{0^+} = -\infty$.

Confrontiamo $f(x)$ con l'infinito campione

$$g(x) = \frac{1}{(x+1)^\alpha}$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to -1^+} (x+1)^{\alpha - \frac{1}{2}} \ln(1+x)$$

$(t = x+1)$

$$= \lim_{t \to 0^+} t^{\alpha - \frac{1}{2}} \ln t = 0^-$$

$$\forall \alpha > \frac{1}{2}$$

Quindi $\ln(1+x)$ è un infinito di ordine INFERIORE rispetto a ogni funzione $\left(\frac{1}{x+1}\right)^\alpha$ con $\alpha > \frac{1}{2}$. In particolare, ad esempio, $\frac{1}{(x+1)^{3/4}}$, che è integrabile in $(-1, 0] \Rightarrow f$ è INTEGRABILE.

6) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}\,dx =$ (per parti)

$$= 2\sqrt{x+1}\,\ln(x+1)\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \frac{2}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

$$= \underbrace{-2\lim_{x\to -1^+} \sqrt{x+1}\,\ln(x+1)}_{=0} - \Big[4\sqrt{x+1}\Big]_{-1}^{0}$$

$$= -4.$$

3) $x^2+y^2+3(x^2-y^2+2ixy)+4=0$

$$\begin{cases} 4x^2-2y^2+4=0 \\ xy=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2y^2=4 \end{cases} \cup \begin{cases} y=0 \\ 4x^2+4=0 \end{cases}$$

impossibile in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\pm\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z_1 = i\sqrt{2}\ ; \quad z_2 = -i\sqrt{2}.$$

4) $e^{\frac{1}{n^2}} - \cos\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{3}{2n^2}$

$$= \cancel{1} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{n^2}}} + \frac{1}{2n^4} - \cancel{1} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{2n^2}}} - \frac{1}{4!n^4} - \underbrace{\cancel{\frac{3}{2n^2}}} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24}\right)\frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) = \frac{11}{24n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$\Rightarrow a_n \sim \frac{\left(n \cdot \frac{11}{24n^4}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \frac{11}{24n}$$

Ma la serie $\sum \frac{11}{24n}$ diverge a $+\infty$

$\Rightarrow$ la serie di partenza diverge a $+\infty$.

5) I_{def}: $\begin{cases} 4-x \leq 0 \\ x-6 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq 6 \end{cases}$

$\Rightarrow I_{def} = [4, 6]$

$f(x) > 0 \quad \forall x \in I_{def}$

f non si annulla mai.

$f(4) = \sqrt{2}$; $f(6) = \sqrt{2}$

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{6-x}} + \frac{1}{2\sqrt{x-4}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{6-x} - \sqrt{x-4}}{\sqrt{6-x}\cdot\sqrt{x-4}}\right]$$

f' NON è definita per $x_1 = 4$; $x_2 = 6$

$$\lim_{x \to 4^+} f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2}\cdot 0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 6^-} f'(x) = \frac{-\sqrt{2}}{2\cdot 0^+\cdot\sqrt{2}} = -\infty$$

$$f'(x) = 0 \iff \sqrt{6-x} = \sqrt{x-4}$$

$$\iff 6 - x = x - 4 \iff x = 5$$

$$f'(x) > 0 \iff \sqrt{6-x} > \sqrt{x-4}$$

$$\iff 6 - x > x - 4 \iff x < 5$$

f cresce in $[4, 5)$ e decresce in $(5, 6]$.

$x_0 = 5$ punto di MAX. REL. e ASS.

x_1, x_2 punti di MIN. REL. e ASS.

$$f(5) = 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[(x-4)^{-\frac{1}{2}} - (6-x)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(x-4)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(6-x)^{\frac{3}{2}}}\right] < 0 \quad \forall x \in (4,6)$$

f è concava in $(4,6)$.

Grafico: