

SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA DI ANALISI 1
del 12/1/2026

①

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{1+n^2}}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \right) \sim \frac{1}{2n^2} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

Quindi

$$a_n \sim \frac{1}{2n^{2-\alpha}}; \quad \sum a_n \approx \frac{1}{2} \sum \frac{1}{n^{2-\alpha}}$$

Daunque

$$a_n \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } \alpha = 2 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}$$

e

$$\sum a_n \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha < 1 \\ \text{diverge} & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

$$2) I_{\text{def}} = \mathbb{R}$$

f pari: $f(-x) = e^{\operatorname{arctg}[(-x)^2-1]} = e^{\operatorname{arctg}(x^2-1)} = f(x).$

$$f(0) = e^{\operatorname{arctg}(-1)} = e^{-\frac{\pi}{4}}$$

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad . \quad \text{No intersezioni con asse } x.$$

lim $f(x) = e^{\operatorname{arctg}(+\infty)} = e^{\frac{\pi}{2}}$
 $x \rightarrow \pm\infty$

$y = \frac{\pi}{2}$ asintoto orizzontale a $\pm\infty$.

$$f'(x) = e^{\operatorname{arctg}(x^2-1)} \left[\frac{1}{1+(x^2-1)^2} \right] 2x$$

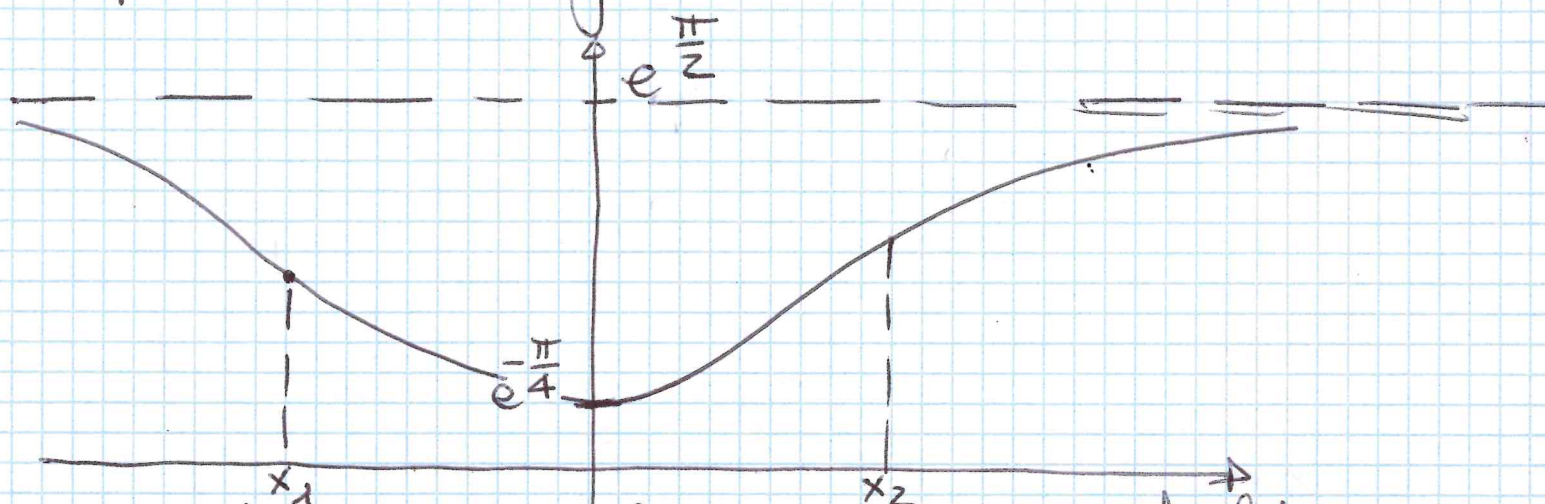
$f'(x) > 0 \quad \forall x > 0 \Rightarrow f$ decresce in $(-\infty, 0)$ e cresce in $(0, +\infty)$. $x=0$ Punto di MIN. ASS.

f è ~~ella~~ LIMITATA, ma non ammette MAX. ASS.

$$R_f = \left[e^{-\frac{\pi}{4}}, e^{\frac{\pi}{2}} \right).$$

(2)

Nell'ipotesi di numero minimo di flessi, ci aspettiamo due flessi:



ANCHE SE NON RICHIESTO, verifichiamo questo calcolando direttamente f'' :

$$f''(x) = e^{\operatorname{arctg}(x^2-1)} \left[\frac{4x^2}{[1+(x^2-1)^2]^2} + \left(\frac{2x}{1+(x^2-1)^2} \right)' \right]$$

$$= e^{\operatorname{arctg}(x^2-1)} \left[\frac{4x^2}{[1+(x^2-1)^2]^2} + 2 \frac{1+(x^2-1)^2 - 2x(x^2-1)2x}{[1+(x^2-1)^2]^2} \right]$$

$$= \frac{2e^{\operatorname{arctg}(x^2-1)}}{[1+(x^2-1)^2]^2} \left[2x^2 + 1 + (x^2-1)(x^2-1-4x^2) \right]$$

$$= \downarrow \left[2x^2 + 1 - 3x^4 + 3x^2 - x^2 + 1 \right]$$

$$= \downarrow (-3x^4 + 4x^2 + 2)$$

$$f''(x) > 0 \iff 3x^4 - 4x^2 - 2 < 0 \quad (3)$$

$$x^2 = t \geq 0 \Rightarrow 3t^2 - 4t - 2 < 0$$

$$\cancel{t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 24}}{6}} \quad t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 6}}{3}$$

$$\Rightarrow 0 \leq t < \frac{2 + \sqrt{10}}{3}$$

$$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{2 + \sqrt{10}}{3}} < x < \sqrt{\frac{2 + \sqrt{10}}{3}} = x_2 \approx \cancel{0.93} 1.31$$

$\Rightarrow f$ concave in $(-\infty, x_1)$ e in $(x_2, +\infty)$, convessa in (x_1, x_2) . x_2 punto di flesso discendente

$x_1 = -x_2$ punto di flesso ascendente.

$$3) (z^2 - \bar{z})z (iz^2 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{z^2 - \bar{z} = 0}_{(a)} \vee \underbrace{z = 0}_{(b)} \vee \underbrace{iz^2 + 1 = 0}_{(c)}$$

b) immediato: $z_1 = 0$

$$a) x^2 - y^2 + 2ixy - x + iy = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - x = 0 \\ y(2x + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - x = 0 \end{cases}$$

$$\cup \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

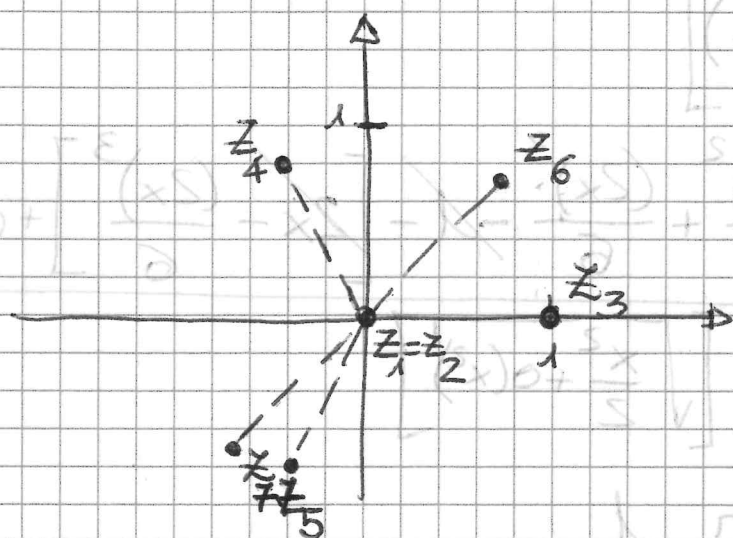
$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x(x - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\cup \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$z_2 = z_1 = 0 \quad ; \quad z_3 = 1 \quad ; \quad z_{4,5} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$c) \quad z^2 + \frac{1}{i} = 0 \Rightarrow z^2 = -\frac{1}{i} \Rightarrow z^2 = i \quad (4)$$

$$\Rightarrow z_{6,7} = \sqrt{i} = \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$



4) L'equazione è definita in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
 Tenuto conto del punto iniziale, il Problema di Cauchy è definito in $(0, +\infty)$.

Poiché $a(x) = \frac{2}{x} \in C^\infty(0, +\infty)$; $f(x) = e^{x^3} \in C^\infty(\mathbb{R})$,
 il Problema di Cauchy ammette una sola soluzione

$$y \in C^1((0, +\infty)).$$

$$y(x) = e^{-\int_1^x \frac{2}{t} dt} \left[1 + \int_1^x e^{\int_1^t \frac{2}{s} ds} e^{t^3} dt \right]$$

$$= e^{-2 \ln|t| \Big|_1^x} \left[1 + \int_1^x e^{2 \ln|s| \Big|_1^t} e^{t^3} dt \right] \quad (x > 0)$$

$$= e^{-2 [\ln x]} \left[1 + \int_1^x e^{2 \ln t} e^{t^3} dt \right]$$

$$= \frac{1}{x^2} \left[1 + \int_1^x t^2 e^{t^3} dt \right] = \frac{1}{x^2} \left[1 + \frac{1}{3} e^{t^3} \Big|_1^x \right] \quad (5)$$

$$= \frac{1}{x^2} \left[1 + \frac{1}{3} (e^{x^3} - e) \right]$$

$$5) \quad f(x) = \frac{\cancel{1} + \cancel{2x} + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} - \cancel{1} - \left[\cancel{2x} - \frac{(2x)^3}{6} \right] + o(x^3)}{x^\alpha \left[\sqrt{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} \right]}$$

$$\underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\left(\frac{4x^2}{2} \right)}{\left(\frac{x^\alpha x}{\sqrt{2}} \right)} = 2\sqrt{2} \frac{1}{x^{\alpha-1}}$$

in $(0,1]$

Di conseguenza, f è integrabile per $\alpha-1 < 1$, ovvero per $\alpha < 2$, mentre non è integrabile in $(0,1]$ per $\alpha \geq 2$