SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI 1 del 19/1/2023

A1

$\boxed{\text{COMPITO A}}$

1) $|w| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \quad w = \sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\, e^{-i\frac{3}{4}\pi}$$

$$\Rightarrow \arg w = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi.$$

$$i\left(\frac{w-\bar{w}}{w+\bar{w}}\right) = i\left[\frac{-1-i-(-1+i)}{-1-i-1+i}\right] = i\left(\frac{-2i}{-2}\right)$$

$$= -1$$

$$\Rightarrow \quad z^4 = (\sqrt{2})^4(-1) = (\sqrt{2})^4\left[\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right]$$

$\Rightarrow$ le quattro soluzioni sono:

$$z_0 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= 1+i$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right] = \sqrt{2}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = (-1+i)$$

$$z_2=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right)\right]=\sqrt{2}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \quad A_2$$

$$=-1-i$$

$$z_3=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right]=\sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$=1-i$$

2) Studiamo direttamente la serie, col criterio della radice:

$$\sqrt[n]{a_n}=\left(1+\frac{1}{n^3+n}\right)^{-n^3}$$

$$=\left[\left(1+\frac{1}{n^3+n}\right)^{-(n^3+n)}\right]^{\frac{n^3}{n^3+n}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\left(\frac{1}{e}\right)^1=\frac{1}{e}<1$$

$$\Rightarrow \underbrace{\text{la serie converge}} \Rightarrow \underbrace{a_n\to 0.}$$

3) $D=\left\{\left|\frac{x}{2}\right|\le 1\right\}=\left\{-2\le x\le 2\right\}=[-2,2]$

$f\in C^0(D)$.

f pari, perchè prodotto di due funzioni dispari.

$f(0)=0$; $f(\pm 2) = 2 \arcsin(1) = 2\,\frac{\pi}{2} = \pi$.

A_3

Segno: f è prodotto di due funzioni positive per $x>0$ e negative per $x<0$

$\Rightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x \in D$ e $f(0)=0$.

$$f'(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + x\,\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \quad \forall x \in (-2,2) = \mathring{D}$$

$f'(x)$ è la somma di due funzioni positive per $x>0$ e negative per $x<0$.

$\Rightarrow f'(x)<0$ per $x<0$

$f'(x)=0$ per $x=0$

$f'(x)>0$ per $x>0$

In $x=\pm 2$ $\nexists f'$. ~~la funzione~~ la tangente risulta essere verticale in $x=\pm 2$.

f decresce in $[-2,0)$ e cresce in $(0,2]$.

In $x=0$ punto di MIN. ASS. A4

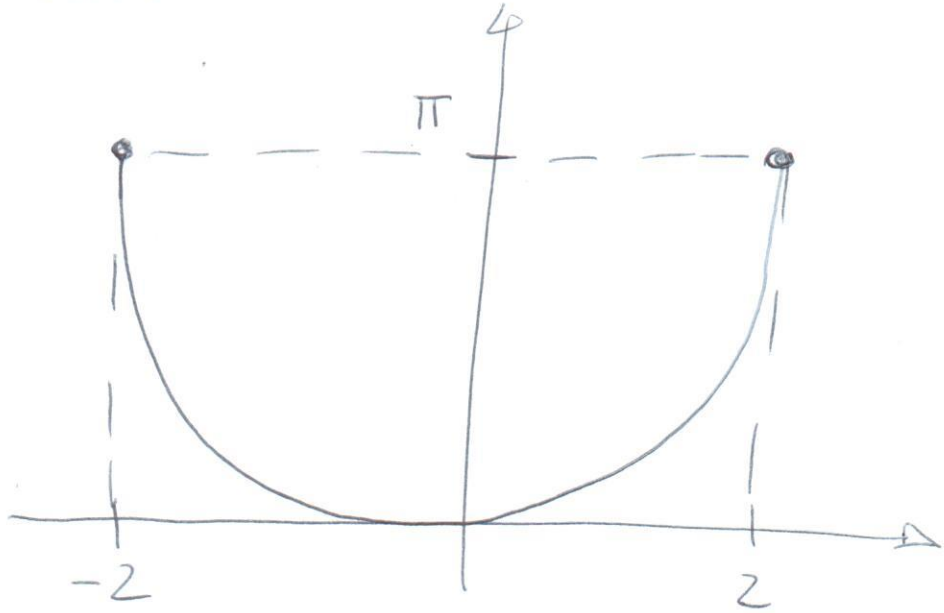
$$f''(x)=\frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}+\frac{1}{2}\left[x\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^{-1/2}\right]'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{}}+\frac{1}{2\sqrt{}}+\frac{1}{2}x\left[-\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right]\left[-\cancel{2}\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{\cancel{2}}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}+\frac{1}{8}\frac{x^2}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right]^3}}>0 \quad \forall\in(-2,2)$$

f sempre convessa.

Grafico:



4) OMOGENEA ASSOCIATA: $\boxed{A_5}$

$$\alpha^2-2\alpha+1=(\alpha-1)^2=0$$

$$\Rightarrow \alpha=1 \qquad m_a=2$$

$$\Rightarrow y_0(x)=C_1e^x+C_2xe^x$$

NON OMOGENEA: METODO di LAGRANGE

$$y_P(x)=C_1(x)e^x+C_2(x)xe^x$$

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix}=e^{2x}(x+1-x)$$
$$=e^{2x}$$

$$\Rightarrow C_1(x)=-\int\frac{e^x xe^x}{(x^2+1)e^{2x}}dx=-\int\frac{x}{x^2+1}dx$$
$$=-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

$$C_2(x)=\int\frac{e^x\cdot e^x}{(x^2+1)e^{2x}}dx=\int\frac{1}{x^2+1}dx=\text{arctg}\,x$$

$$\Rightarrow y_{NO}(x)=C_1e^x+C_2xe^x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)e^x$$
$$+x\,\text{arctg}\,x\cdot e^x$$

5)

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{x^4}\left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) - 2 + 2\left[1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4!x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right]\right]$$

$$\sim x^2\left[-\frac{1}{2x^4} + \frac{2}{24x^4}\right] = \frac{-5}{12x^2}$$

$\frac{1}{x^2}$ è integrabile a $+\infty$

$\Rightarrow f(x)$ è integrabile in $[1, +\infty)$.