COMPITO B

B_1

1) $D=\{|x|\le 1\}=[-1,1]$.

f è PARI, perché prodotto di due funzioni dispari.

$f(0)=0$

Segno: f è prodotto di funzioni positive per $x>0$ e negative per $x<0$

$\Rightarrow f(x)\geq 0 \quad \forall x\in D \; ; \; f(0)=0.$

$f\in C^0(D) \quad ; \quad f(\pm 1)=2\cdot\dfrac{\pi}{2}=\pi$

$$f'(x)=2\arcsin x+\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$$

f' è la somma di due funzioni positive per $x>0$, negative per $x<0$. $\exists f'(x) \; \forall x\in(-1,1)$

$\Rightarrow \quad f'(x)>0 \qquad \forall x>0$

$f'(x)=0 \qquad \text{in } x=0$

$f'(x)<0 \qquad \forall x<0$

f decresce in $[-1,0)$ e cresce in $(0,1]$. B_2

$x=0$ punto di MIN. ASS.

$x=\pm 1$ punti di MAX. ASS.

Si osservi che $\nexists\, f'(\pm 1)$. La tangente è verticale nei punti $x=\pm 1$.

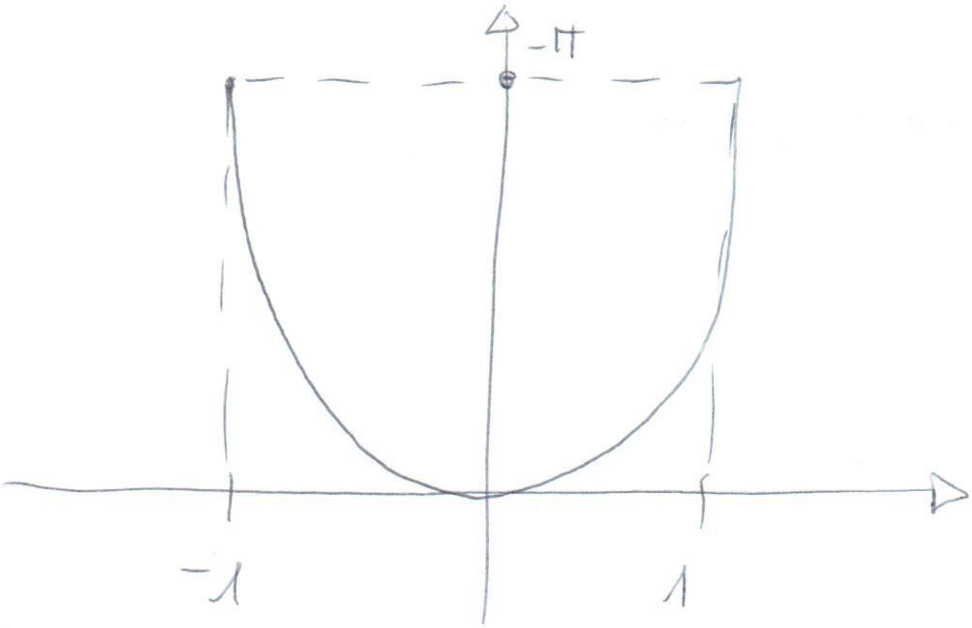
$$f''(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + 2\left[x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]' =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + 2x\left[-\frac{1}{\cancel{2}}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-\cancel{2}x)\right]$$

$$= \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}} > 0 \quad \forall x\in(-1,1).$$

f sempre convessa.

Grafico:



2) OMOGENEA ASSOCIATA:

$$\alpha^2 - 4\alpha + 4 = (\alpha-2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 2 \quad m_a = 2$$

$$\Rightarrow y_0(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

NON OMOGENEA:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{2x} & x e^{2x} \\ 2e^{2x} & (2x+1)e^{2x} \end{vmatrix} = (2x+1-2x)e^{4x} = e^{4x}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = C_1(x) e^{2x} + C_2(x) x e^{2x}$$

con

$$C_1(x) = -\int \frac{e^{2x} \cdot x e^{2x}}{(x^2+1)\, e^{4x}} = -\int \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \ln(x^2+1)$$

$$C_2(x) = \int \frac{e^{2x} e^{2x}}{(x^2+1) e^{4x}} dx = \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x$$

$$\Rightarrow y_{NO}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) e^{2x} + x \operatorname{arctg} x \cdot e^{2x}.$$

3)

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\cdot\frac{\pi}{2}\left[\begin{array}{l}\cancel{1}+\frac{1}{x}+\cancel{\frac{1}{2x^2}}+\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\\ -\cancel{1}-\cancel{\frac{1}{2x^2}}-\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]\end{array}\right]$$

$$\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}x\left[\frac{1}{3x^3}\right]=\frac{\pi}{6x^2}$$

B_4

Poiché $\frac{1}{x^2}$ è integrabile a $+\infty$

$\Rightarrow f(x)$ è integrabile in $[1,+\infty)$.

4) $|w|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$$\Rightarrow w=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right]$$

$$\Rightarrow \arg w=\frac{3}{4}\pi+2k\pi.$$

$$-i\left(\frac{w-\bar{w}}{w+\bar{w}}\right)=-i\left[\frac{(-1+i)-(-1-i)}{(-1+i)+(-1-i)}\right]$$

$$=-i\left(\frac{2i}{-2}\right)=-1$$

$$\Rightarrow z^4=(\sqrt{2})^4\cdot(-1)=(\sqrt{2})^4\left[\cos(\pi)+i\sin(\pi)\right]$$

$$=(\sqrt{2})^4 e^{i\pi}.$$

$$\Rightarrow z_0 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 1 + i$$

B5

$$z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right] = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= (-1 + i)$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{5}{4}\pi\right)\right] = \sqrt{2}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= (-1 - i)$$

$$z_3 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right] = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 1 - i.$$

5) Studiamo direttamente la serie, col criterio delle radice.

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(1 - \frac{1}{n^3+n^2}\right)^{n^3} = \left[\left(1 - \frac{1}{n^3+n^2}\right)^{n^3+n^2}\right]^{\frac{n^3}{n^3+n^2}}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \left(\frac{1}{e}\right)^1 = \frac{1}{e} < 1$$

$$\Rightarrow \text{la serie converge} \Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$