SVOLGIMENTO PROVA SCRITTA DI ANALISI 2
DEL 22/6/2026

COMPITO A

Si osservi che $D_c = \mathbb{R}$ (1)

$$\varphi_n(0) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

$$\varphi_n(-1) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\varphi_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{se } x>0 \quad (\varphi_n(x)>0) \\ +\infty & \text{se } -1<x<0 \quad (\varphi_n(x)\geq 0) \\ -\infty & \text{se } x<-1 \quad (\varphi_n(x)<0) \end{cases}$$

$$D_{cp} = \{-1\} \cup [0, +\infty)$$

Poiché $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x=-1 \\ 1 & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x>0 \end{cases}$

non posso avere convergenza uniforme in $[0,+\infty)$, essendo $\varphi(x)$ discontinua in 0.

In $(0,+\infty)$ non ho convergenza uniforme:

metodo a): $\sup_{(0,+\infty)} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| = \sup_{(0,+\infty)} \varphi_n(x)$

$$\geq \varphi_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1+\frac{1}{n}}{e} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e} \neq 0$$

metodo b): $\sup_{(0,+\infty)} \varphi_n(x) \geq \lim_{x\to 0^+} \varphi_n(x) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \neq 0$

metodo c): $|\varphi_n - \varphi|' = \varphi_n'(x) = \left[(x+1)e^{-nx}\right]'$ (2)

$$= \left[1 - n(x+1)\right] e^{-nx} > 0$$

$$\iff n(x+1) < 1 \iff x < -1 + \frac{1}{n} \leq 0$$

Pertanto $\sup_{(0,+\infty)} \varphi_n(x) = \varphi_n(0) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \neq 0$

Poiché φ_n decresce in $(0,+\infty)$, consideriamo $[\alpha,+\infty)$, con $\alpha > 0$:

$$\sup_{[\alpha,+\infty)} \varphi_n(x) = \varphi_n(\alpha) = \frac{\alpha+1}{e^{n\alpha}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$D_{cu} = [\alpha,+\infty) \quad \forall \alpha > 0.$$

Per lo studio della serie, abbiamo che, poiché $\varphi_n(-1) = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(-1) = 0$.

Inoltre, per $x \in (0,+\infty)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (x+1)e^{-nx} = (x+1)\sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-x})^n$$

serie geometrica, che converge puntualmente e assolutamente se $|e^{-x}| < 1$, cioè se $e^{-x} < 1$, cioè $\forall x \in (0,+\infty)$

$$D_{cp} = \{-1\} \cup (0,+\infty).$$

La serie geometrica $\sum q^n$ converge totalmente e uniformemente $\forall [-h, h] \subset (-1, 1)$.

$\Rightarrow |e^{-x}| \leq h < 1 \Rightarrow e^{-x} \leq h < 1$ (3)

$\Rightarrow -x \leq \ln(h) < 0$

$\Rightarrow x \geq -\ln(h) > 0$ o, poichè $0 < h < 1$, e $\ln(h) < 0$ $\Rightarrow$ si può dire che la serie converge totalmente e uniformemente $\forall [a, +\infty)$, con $a > 0$.

2)

$$|f(x,y)| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\sim} \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{xy^2}{y^2}\right| = |x| \underset{x\to 0}{\to} 0$$

f è continua in $(0,0)$.

$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$

$$\frac{df}{d\vec{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\alpha\beta^2 t^3}{t[(\alpha^2+\beta^2)t^2]} = \lim_{t\to 0} \alpha\beta^2 = \alpha\beta^2.$$

La derivata direzionale non rispetta la formula del gradiente, quindi f NON è differenziabile in $(0,0)$.

Infatti,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2 k}{(h^2+k^2)^{3/2}}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3 \cos^2\vartheta \sin\vartheta}{\rho^3} = \cos^2\vartheta \sin\vartheta$$

QUINDI f NON È DIFFERENZIABILE in $(0,0)$.

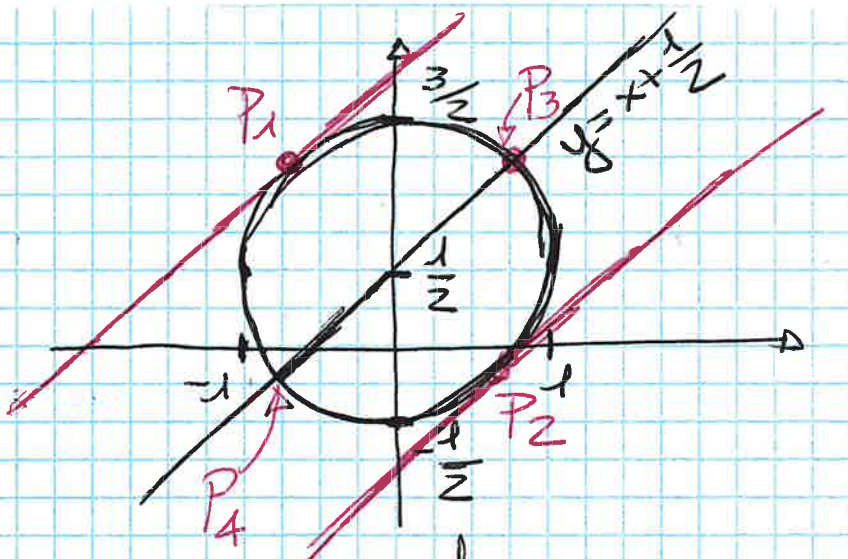
3)

In $\mathring{D}$:

$$f_x = 2(x+y)+1$$

$$f_y = 2(x-y)-1$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f(x,y) = \vec{0} \iff x-y = -\frac{1}{2}$$



ovvero $y = x + \frac{1}{2}$ infiniti punti stazionari

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} ; \quad |H_f| = 0 \Rightarrow \text{SEMIDEFINITA POSITIVA}.$$

Si osservi però che

$$f(x,y) = (x-y)^2 + (x-y) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1$$

$$= \left[(x-y) + \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

e $f(x,y)=\frac{3}{4} \iff x-y+\frac{1}{2}=0$

Quindi i punti sulla retta $y=x+\frac{1}{2}$ sono tutti di MIN. ASSOLUTO.

Un altro modo di giungere a queste conclusioni consiste nell'osservare che f dipende da (x,y) solo tramite $t=x-y$. Pertanto le curve $x-y+c=0$ sono curve di livello per f.

~~$f(x,y)=f(t)=t^2+t+1$~~

$$\Delta f(x-y)=\Delta f(t)=t^2+t+1-\frac{3}{4}$$

$$=t^2+t+\frac{1}{4}=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$$

$$\Delta f=0 \iff t=-\frac{1}{2} \iff x-y+\frac{1}{2}=0.$$

Per tutte le altre rette $x-y+c=0$, $\Delta f>0$.

Inoltre, poiché $\Delta f(t)=t^2+t+\frac{1}{4}$ è una parabola, più ci si allontana dal centro della circonferenza, più grande è il valore di Δf, cioè di f. Si avranno MAX. ~~e MIN~~ ASSOLUTI per f in D nei punti P_1 e P_2 intersezione fra la circonferenza e le uniche due rette parallele a $x-y+\frac{1}{2}=0$ e tangenti alla circonferenza.

Otteniamo lo stesso risultato lavorando

a) con la lagrangiana; b) con la parametrica

~~Eq~~ di ∂D: $\begin{cases} x(\vartheta) = \cos\vartheta \\ y(\vartheta) = \frac{1}{2} + \sin\vartheta \end{cases}$ (6)

(a): $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = (x-y)^2 + (x-y) + 1 - \lambda\left[x^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right]$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = 2(x-y) + 1 - 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y = -2(x-y) - 1 - 2\lambda\left(y-\frac{1}{2}\right) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda = -\left[x^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right] = 0 \end{cases}$$

SOMMO MEMBRO A MEMBRO

$$\begin{cases} -2\lambda\left[x + y - \frac{1}{2}\right] = 0 \\ 2\left[x - y + \frac{1}{2}\right] - 2\lambda x = 0 \\ x^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ x - y + \frac{1}{2} = 0 \\ x^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\cup \begin{cases} x = \frac{1}{2} - y \\ x + y = \frac{1}{2} \\ 2\left\{\left[\frac{1}{2} - y - y + \frac{1}{2}\right] - \lambda\left[\frac{1}{2} - y\right]\right\} = 0 \\ 2\left[\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\right] = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ x = y - \frac{1}{2} \\ 2\left[\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\right] = 1 \end{cases}$$

$$\cup \begin{cases} x = \frac{1}{2} - y \\ (1-2y) - \lambda\left(\frac{1}{2} - y\right) = 0 \\ \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ x = y - \frac{1}{2} \\ \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x = \frac{1}{2} - y \\ (2-\lambda)\left(\frac{1}{2} - y\right) = 0 \\ y - \frac{1}{2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{SOSTITUISCO}$$

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ y - \frac{1}{2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = y - \frac{1}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x = \frac{1}{2} - y \\ (2-\lambda)\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 \\ y = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \cup \begin{cases} \lambda = 0 \\ y = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \cup \begin{cases} \lambda = 2 \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \cup \begin{cases} \lambda = 2 \\ y = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$\lambda = 0$ implica che i punti

$\vec{P}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e

$\vec{P}_4 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sono punti stazionari

liberi per f. infatti appartengono alla retta $x - y = -\frac{1}{2}$.

P_3 e P_4 Tutti i punti appartenenti al segmento $\begin{cases} x - y = -\frac{1}{2} \\ x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \end{cases}$ sono di MINIMO ASSOLUTO per f in D.

I punti $\vec{P}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\vec{P}_2 = \left(+\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sono, come già previsto, di MAX. ASSOLUTO

(8)

$$f(\vec{P}_1) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + 1$$

$$= \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)^2 - \sqrt{2} + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{4} + \cancel{\sqrt{2} - \sqrt{2}} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{11}{4}.$$

$$f(\vec{P}_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1$$

$$= \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \sqrt{2} + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{4} - \cancel{\sqrt{2} + \sqrt{2}} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{11}{4} = f(\vec{P}_1).$$

~~In alternativa~~ (b): $\partial D = \begin{cases} x = \cos\vartheta \\ y = \frac{1}{2} + \sin\vartheta \end{cases}$

$$f|_{\partial D} = \left[\cos\vartheta - \frac{1}{2} + \sin\vartheta\right]^2 + \cos\vartheta - \frac{1}{2} - \sin\vartheta + 1$$

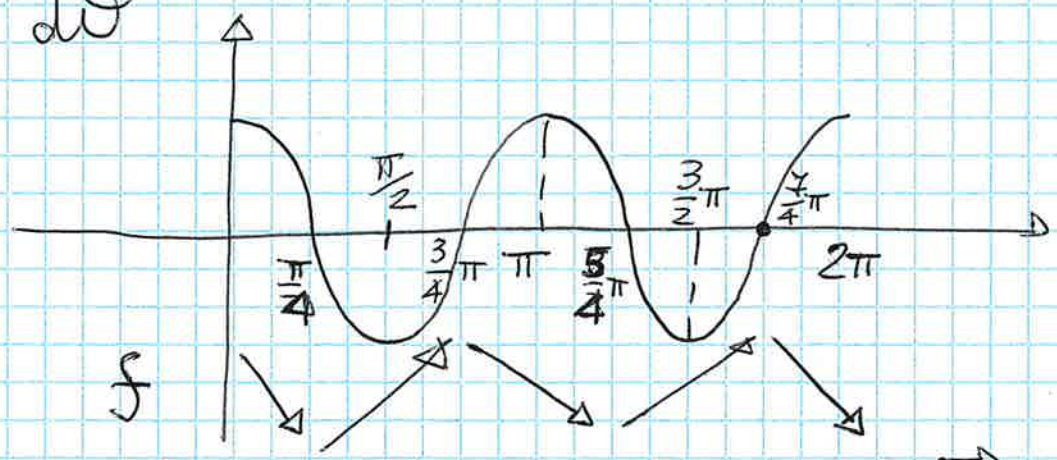
$$= \left[(\cos\vartheta - \sin\vartheta) - \frac{1}{2}\right]^2 + \cos\vartheta - \sin\vartheta + \frac{1}{2}$$

$$= (\cos\vartheta - \sin\vartheta)^2 + \frac{1}{4} - \cancel{(\cos\vartheta - \sin\vartheta)}$$

$$\cancel{+ (\cos\vartheta - \sin\vartheta)} + \frac{1}{2}$$

$$= 1 - 2\cos\vartheta\sin\vartheta + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} - \sin 2\vartheta$$

$$\frac{d(f|_D)}{d\vartheta} = -2\cos 2\vartheta > 0 \iff \cos 2\vartheta < 0$$



$\vartheta = \frac{\pi}{4}$ punto di MIN. REL. $\Rightarrow \vec{P}_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$

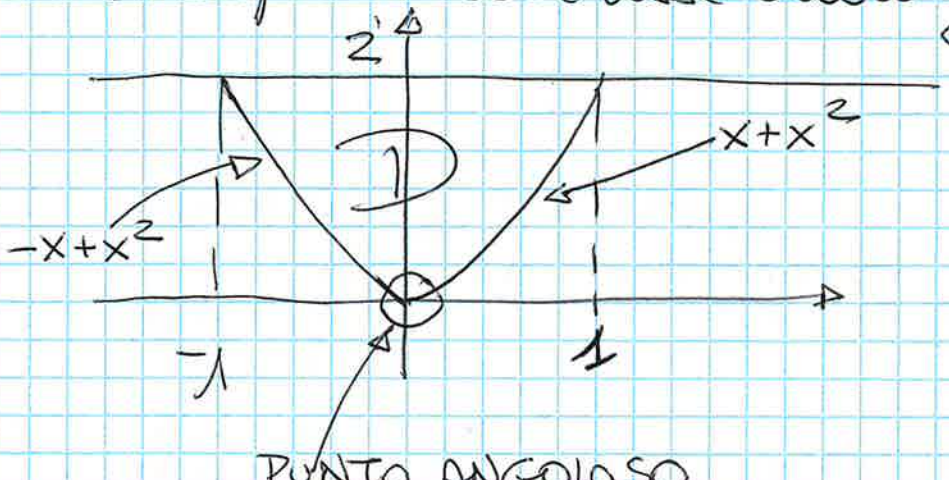
$\vartheta = \frac{3}{4}\pi$ punto di MAX. REL. $\Rightarrow \vec{P}_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$

$\vartheta = \frac{5}{4}\pi$ punto di MIN. REL. $\Rightarrow \vec{P}_4 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$

$\vartheta = \frac{7}{4}\pi$ punto di MAX. REL. $\Rightarrow \vec{P}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$

PUNTI GIÀ DETERMINATI COL METODO (a).

4) Poiché $g(x) = |x| + x^2$ è una funzione pari allora il dominio D è simmetrico rispetto all'asse delle y:



Data la simmetria di D, $x_B = 0$.

Inoltre, $y_B = \dfrac{2\int_0^1 dx \int_{x+x^2}^{2} y\,dy}{2\int_0^1 dx \int_{x+x^2}^{2} dy} =$

$$= \frac{\int_0^1 dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x+x^2}^{2}}{\int_0^1 dx \left[2-x-x^2\right]} = \frac{1}{2}\left[\frac{\int_0^1 \left[4-(x+x^2)\right]^2 dx}{\left[2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\int_0^1 \left[4-x^2-x^4-2x^3\right]dx}{2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\left[4x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}-\frac{1}{2}x^4\right]_0^1}{\frac{7}{6}}\right]$$

$$= \frac{3}{7}\left[4-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right] = \frac{3}{7}\left[\frac{120-10-6-15}{30}\right] = \frac{3\cdot 89}{30\cdot 7}$$

$$= \frac{89}{70}$$

5) $\vec{F} = \left(\dfrac{x^2(x^2+y^2)+y}{x^2+y^2}, \dfrac{2(x^2+y^2)-x}{x^2+y^2}\right)$

$$= \left(\frac{x^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} + \frac{y}{x^2+y^2}, \frac{2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} - \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

Il campo è definito in $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, molteplicemente linearmente connesso.

Inoltre $\vec{F} = \vec{F} + \vec{F}$ dove

$\vec{F}_1$ è l'opposto del ben noto campo vettoriale radiale ma non conservativo, tale che (11)

$$\oint_\gamma \vec{F}_1 \cdot d\vec{s} = -2\pi$$

lungo ogni curva γ chiusa percorsa in senso antiorario una sola volta

(si osservi che la curva in esame è un'ellisse, con semiassi $a=2$; $b=3$).

$\vec{F}_2 = \left(\frac{x^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)}, \frac{2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} \right)$ è anch'esso definito in $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ ed è tale che

$$\vec{F}_2(x^2, 2) \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

e può essere discusso in tre modi.

a) Possiamo prendere in considerazione il suo prolungamento per continuità:

$$\tilde{\vec{F}}_2(x,y) = \begin{cases} \vec{F}_2(x,y) & \forall (x,y) \neq (0,0) \\ (0,2) & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

che risulta essere anche di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ e tale che

$$\frac{\partial F_{2,1}}{\partial y} = \frac{\partial F_{2,2}}{\partial x} = 0$$

quindi irrotazionale e conservativo (perché definito su $\mathbb{R}^2$).

$$\Rightarrow \oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} = \oint_\gamma \vec{F}_1\cdot d\vec{s} + \oint_\gamma \vec{F}_2\cdot d\vec{s} = -2\pi.$$

b) $\vec{F}_2(x,y) = (x^2, 2) \quad \forall (x,y)\neq(0,0)$,

essendo irrotazionale, è anche localmente conservativo. Ma è facile da verificare che in realtà è conservativo su tutto $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, perché se ne costruisce facilmente un potenziale, definito su tutto $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

$$U_2(x,y) = \frac{x^3}{3} + 2y + C.$$

$$\Rightarrow \oint_\gamma \vec{F}_2\cdot d\vec{s} = 0$$

c) Poiché $\vec{F}_2(x,y)=(x^2,2)$ è irrotazionale su $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, ogni circonferenza attorno alla origine (0,0) ha lo stesso valore. Lungo la circonferenza unitaria

$$C: \begin{cases} x(\vartheta) = \cos\vartheta \\ y(\vartheta) = \sin\vartheta \end{cases} \quad \vartheta\in[0,2\pi]$$

si ha

$$\oint_{\gamma_\varepsilon} \vec{F}_2 \cdot \vec{ds} = \int_0^{2\pi} \left[\cos^2\vartheta \cdot (-\sin\vartheta) + 2\cos\vartheta \right] d\vartheta \quad (13)$$

$$= \left[\frac{\cos^3\vartheta}{3} + 2\sin\vartheta \right]_0^{2\pi} = 0 = \oint_\gamma \vec{F}_2 \cdot \vec{ds}$$

Dunque, di nuovo,

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot \vec{ds} = \oint_\gamma \vec{F}_1 \cdot \vec{ds} + \oint_\gamma \vec{F}_2 \cdot \vec{ds}$$

$$= -2\pi$$

6) OMOGENEA: $\alpha^2 + \alpha = 0$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 0 \; ; \; \alpha_2 = -1$$

$$\Rightarrow y_0(x) = C_1 + C_2 e^{-x}$$

NON OMOGENEA: poiché $\alpha = -1$ è radice del polinomio caratteristico, allora $y_p = Cxe^{-x}$

$$y_p' = C(1-x)e^{-x} \; ; \; y_p'' = C\left[-1-1+x\right]e^{-x}$$

$$= C(x-2)e^{-x}$$

Sostituendo: $C\left[\cancel{x}-2+1-\cancel{x}\right]e^{-x} = e^{-x}$

$\Rightarrow -C = 1 \Rightarrow C = -1$

$\Rightarrow y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} - x e^{-x}$

$y(0) = 1 = C_1 + C_2$

$y'(x) = -C_2 e^{-x} - (1-x) e^{-x}$

$y'(0) = 0 = -C_2 - 1 \Rightarrow C_2 = -1$

$\Rightarrow C_1 = 1 - C_2 = 2$

$\Rightarrow y(x) = 2 - e^{-x} - x e^{-x} = 2 - (x+1) e^{-x}$