# SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI 2 del 22/7/26.



1) DOMINIO DI CONTESTO: $1+\frac{x}{n}>0$

$\Rightarrow x>-n \quad ; \quad n\geq -1$

$\Rightarrow D_c=\{x\geq -1\}=(-1,+\infty)$.

$$f_n(0)=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

$\forall x\in(-1,+\infty)\setminus\{x=0\}$:

$$f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{x}{n}+x=x \qquad D_{cp}=D_c=(-1,+\infty)$$

$$\Rightarrow f(x)=\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=x \qquad \forall x\in(-1,+\infty)$$

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)+\frac{nx+1}{n}-x\right|$$

$$=\left|\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)+\frac{\cancel{nx}+1-\cancel{nx}}{n}\right|=\left|\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)+\frac{1}{n}\right|$$

Poichè si chiede di individuare un insieme di convergenza uniforme, poniamoci in $[0,+\infty)$, in quanto in tale intervallo sicuramente $\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\geq 0 \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|$

$$=\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)+\frac{1}{n}.$$

$$\left(|f_n(x)-f(x)|\right)' = \left[\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)+\frac{1}{n}\right]' =$$

$$\frac{1}{1+\frac{x}{n}}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n+x} > 0 \qquad \forall x \in [0,+\infty).$$

Pertanto $\sup_{[0,+\infty)} |f_n(x)-f(x)| = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)+\frac{1}{n}\right]$

$= +\infty$ NO CONV. UNIF.

$\Rightarrow$ scegliamo $[0,b]$:

$$\sup_{[0,b]} |f_n(x)-f(x)| = \ln\left(1+\frac{b}{n}\right)+\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Pertanto ogni intervallo $[0,b]$ è intervallo di convergenza uniforme.

Poiché $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ solo per $x=0$,

e $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, la serie non converge in alcun punto.

2) $|f(x,y)| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\sim} \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x^2y}{x^2}\right| = y \to 0$

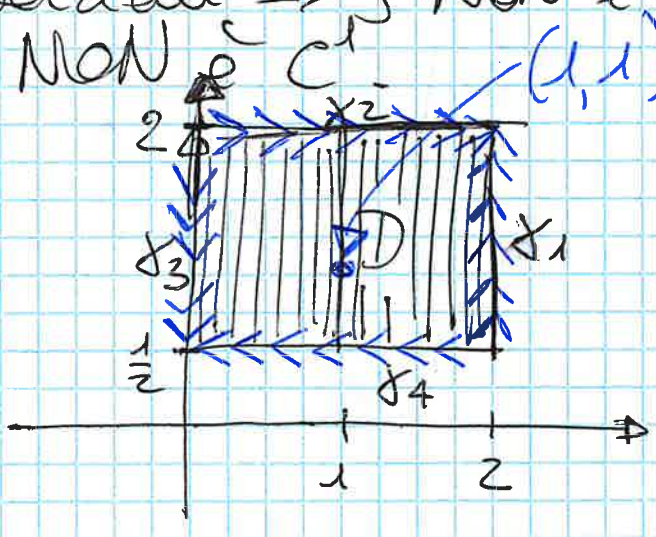
$f$ è continua in $(0,0)$.

$f(x,0) = f(0,y) = 0 \Rightarrow f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0.$

$$\frac{df}{d\vec{u}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{e^{t^3\alpha^2\beta} - 1}{t^3} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3\alpha^2\beta}{t^3} = \alpha^2\beta$$

$\Rightarrow \exists$ der. dir. per ogni direzione.

le der. direzionali non sono combinazioni lineari delle derivate parziali $\Rightarrow f$ NON è differenziabile $\Rightarrow f$ NON è $C^1$.




3) In $\mathring{D}$:

$$\begin{cases} f_x = \ln y \\ f_y = \frac{x}{y} - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (1,1)$$ unico punto stazionario interno

$f(1,1) = -1$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{y} \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix}; \quad H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$f_{yy} < -1$ ; $|H_f(1,1)| = -1 < 0$

$(1,1)$ punto di sella.

Su $\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$, con

$\gamma_1 : \begin{cases} x = 2 \\ y \in [\frac{1}{2}, 2] \end{cases}$ ; $\gamma_2 : \begin{cases} y = 2 \\ x \in [0,2] \end{cases}$ ; $\gamma_3 : \begin{cases} x = 0 \\ y \in [\frac{1}{2}, 2] \end{cases}$

$\gamma_4 : \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x \in [0,2] \end{cases}$

$f|_{\gamma_1} = 2\ln y - y$ ; $(f|_{\gamma_1})' = \frac{2}{y} - 1 > 0 \iff y < 2$

$y \in [\frac{1}{2}, 2]$

$f|_{\gamma_2} = x \ln 2 - 2$ crescente

$x \in [0,2]$

$f|_{\gamma_3} = -y$ decrescente

$y \in [\frac{1}{2}, 2]$

$f|_{\gamma_4} = -x \ln 2 - \frac{1}{2}$ decrescente

$x \in [0,2]$

$(2, \frac{1}{2})$ punto di MIN. REL. ; $f(2, \frac{1}{2}) = -2\ln 2 - \frac{1}{2}$

$(2,2)$ punto di MAX. REL. ; $f(2,2) = 2(\ln 2 - 1)$

$(0,2)$ punto di MIN. REL. ; $f(0,2) = -2$

$(0, \frac{1}{2})$ punto di MAX. REL.; $f(0,\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$

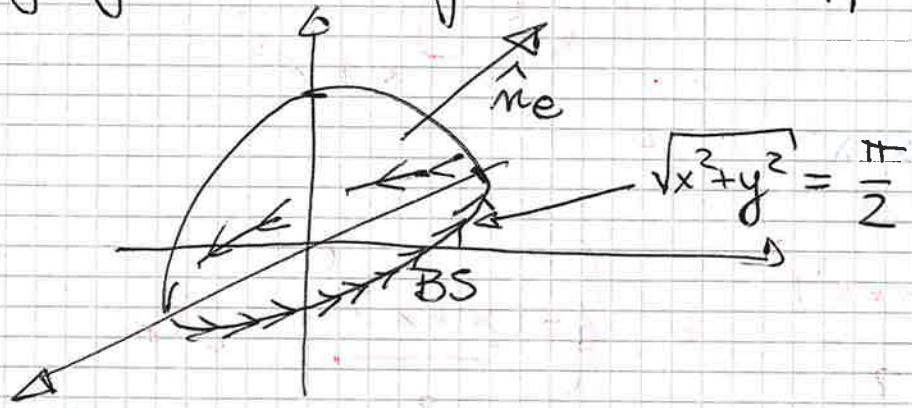
Poiché $-2\ln 2 - \frac{1}{2} \cong -1{,}89$; $2(\ln 2 - 1) \cong -0{,}61$

$(0,2)$ punto di MIN. ASS.

$(0, \frac{1}{2})$ punto di MAX. ASS.

4) Poiché il coseno è decrescente nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$, abbiamo che la funzione $z = \cos\sqrt{x^2+y^2}$ è tale che $z(0,0) = 1$; $z\left(\sqrt{x^2+y^2} = \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Il grafico della funzione è approssimativamente




Dunque il bordo della superficie è $BS = \begin{cases} z = 0 \\ \sqrt{x^2+y^2} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ (una circonferenza).

Se consideriamo $\hat{n}_e$ nel verso indicato nella figura, BS va percorsa secondo quanto indicato in figura

$$\Phi_S(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) = \oint_{BS^+} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

dove $BS^+$: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2}\cos\vartheta \\ y = \frac{\pi}{2}\sin\vartheta \\ z = 0 \end{cases}$ $\vartheta \in [0, 2\pi]$

$$= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\pi}{2}(\cos\vartheta + \sin\vartheta)\left(-\frac{\pi}{2}\sin\vartheta\right) - \frac{3}{6}\frac{\pi^2}{4^2}\sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{\pi}{2}\cos\vartheta\right)\right] d\vartheta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\pi^2}{4}\cos\vartheta(-\sin\vartheta) - \frac{\pi^2}{4}\sin^2\vartheta + \frac{3\pi^3}{4}\cos^2\vartheta(-\sin\vartheta)\right] d\vartheta$$

$$= \left[\frac{\pi^2}{8}\cos^2\vartheta + \frac{3\pi^3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cos^3\vartheta\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{\pi^2}{4}\sin^2\vartheta\, d\vartheta \qquad (6)$$

$$= 0$$

$$= -\frac{\pi^2}{8}\int_0^{2\pi}\left[1-\cos 2\vartheta\right]d\vartheta = -\frac{\pi^2}{8}\cdot\left[2\pi - \frac{1}{2}\sin 2\vartheta\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{-\pi^3}{4}$$

5) Poiché $y+z=4$, la curva è planare.

$\Rightarrow z = 0$.

$\Rightarrow \hat{B} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$

$$\vec{r}'(t): \begin{cases} x'(t) = -\sqrt{2}\sin t \\ y'(t) = -\cos t \\ z'(t) = \cos t \end{cases}$$

$$\vec{r}''(t): \begin{cases} x''(t) = -\sqrt{2}\cos t \\ y''(t) = \sin t \\ z''(t) = -\sin t \end{cases}$$

$$v(t) = \sqrt{2\sin^2 t + 2\cos^2 t} = \sqrt{2}$$

$$\hat{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2}\sin t, -\cos t, \cos t)$$

$$= \left(-\sin t, -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)$$

$$\vec{r}'(t)\wedge\vec{r}''(t)=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -\sqrt{2}\sin t & -\cos t & \cos t\\ -\sqrt{2}\cos t & \sin t & -\sin t\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}\cdot 0-\hat{j}\left(\sqrt{2}\sin^2 t+\sqrt{2}\cos^2 t\right)+\hat{k}\left(-\sqrt{2}\sin^2 t-\sqrt{2}\cos^2 t\right)$$

$$=-\hat{j}\sqrt{2}-\hat{k}\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow\hat{B}=\frac{\vec{r}'(t)\wedge\vec{r}''(t)}{\|\vec{r}'\wedge\vec{r}''\|}=\frac{(0,-\sqrt{2},-\sqrt{2})}{2}=\frac{-1}{\sqrt{2}}(0,1,1).$$

$$\hat{N}=\hat{B}\wedge\hat{T}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -\sin t & -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t & \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\sin t & -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t & \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\end{vmatrix}\begin{matrix}\left(-\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2}\cos t\right)\hat{i}\\ -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)\hat{j}\\ +\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)\hat{k}\end{matrix}$$

$$=(-\cos t,+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t,-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t).$$

$$k(t)=\frac{\|\vec{r}'(t)\wedge\vec{r}''(t)\|}{v^3(t)}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

La curva, piana, è a curvatura costante, pertanto è una CIRCONFERENZA.