

1) Partiamo dalla condizione necessaria di convergenza:

$$|\varphi_n(x)| \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{se } \left| \frac{2x-4}{3} \right| > 1 \\ 1 & \text{se } \left| \frac{2x-4}{3} \right| = 1 \\ 0 & \text{se } \left| \frac{2x-4}{3} \right| < 1 \end{cases}$$

Quindi la CN è rispettata solo per $x \in I = \left\{ \frac{1}{2} < x < \frac{7}{2} \right\}$. Per tutti gli altri valori di x

$\sum \varphi_n$ diverge assolutamente e non converge puntualmente.

Trostandosi solo di CN, studiamo la convergenza assoluta in I , col criterio della radice:

$$\sqrt[k]{|\varphi_k(x)|} = \left| \frac{2x-4}{3} \right| \rightarrow 0 \iff x \in I$$

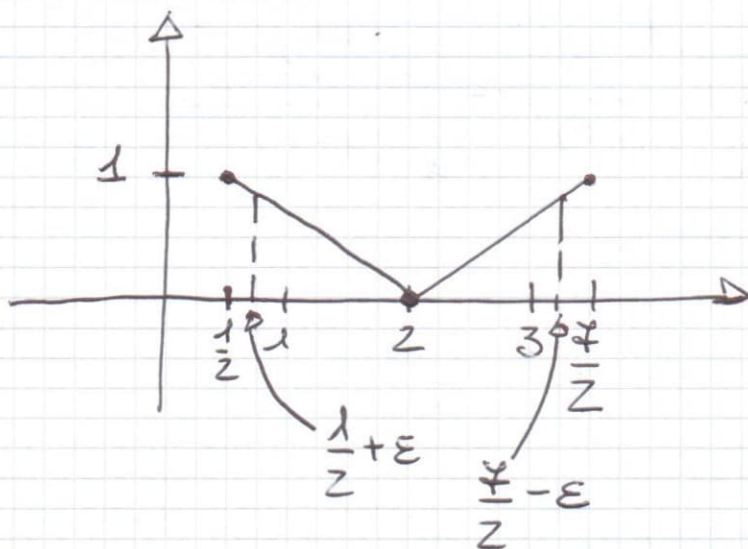
Quindi convergenza puntuale e assoluta in $I = \left\{ \frac{1}{2} < x < \frac{7}{2} \right\}$.

Passando alla convergenza totale, si ha

$$\sup_{x \in I} |\varphi_n(x)| = \left| \varphi_n\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| \varphi_n\left(\frac{7}{2}\right) \right| = 1$$

Quindi non c'è convergenza totale in I .

Consideriamo allora l'insieme
 $I_\epsilon = \left[\frac{1}{2} + \epsilon, \frac{4}{2} - \epsilon \right], \quad 0 < \epsilon < \frac{3}{2}$



$$\sup_{x \in I_\epsilon} |f_n(x)| = \left| 1 - \frac{2}{3}\epsilon \right| < 1$$

$$\Rightarrow \sum \sup_{x \in I_\epsilon} |f_n(x)|^k = \sum \left| 1 - \frac{2}{3}\epsilon \right|^{k^2}$$

Applicando di nuovo il criterio della radice, si ha che

$$\sqrt[k]{\sup_{x \in I_\epsilon} |f_n(x)|} = \left| 1 - \frac{2}{3}\epsilon \right| \rightarrow 0$$

$\Rightarrow$ CONV. TOTALE (e quindi UNIFORME)
 in ogni intervallo

$$\left[\frac{1}{2} + \epsilon, \frac{4}{2} - \epsilon \right], \text{ con } 0 < \epsilon < \frac{3}{2}.$$

Per $(x,y) \neq (0,0)$

$$|f(x,y)| = \left| \frac{x[y^2 - \sin y^2]}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \left| \frac{x \left[y^2 - y + \frac{1}{6} y^6 + o(y^6) \right]}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{x[y^6 + o(y^6)]}{6\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \underset{(x,y) \rightarrow (0,0)}{\sim} \left| \frac{xy^6}{6\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{|x| |y|^6}{6|x|}$$

(x,y) → (0,0)

$\Rightarrow f(x,y)$ CONTINUA in $(0,0)$

$$f(x,0) = f(0,y) = 0 \Rightarrow f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$$

$$\frac{df}{d\vec{w}}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \alpha \left[\frac{t^2}{\beta^2} - \sin\left(\frac{t^2}{\beta^2}\right) \right]}{t|t|}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha \left[\frac{t^6}{\beta^6} \right]}{6|t|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha \beta^6 |t|^5}{6|t|} = 0$$

$$\forall \vec{v} = (\alpha, \beta)$$

DIFFERENZIABILITA':

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{\frac{h[k^2 - \sin(k^2)]}{\sqrt{h^2 + k^2}}}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{\frac{h k^6}{6}}{(h^2 + k^2)} \right|$$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\left| R\left(\frac{k}{h}\right) \right|}{k^2} = 0$$

$\Rightarrow f(x,y)$ differenziabile in $(0,0)$.

$$\Rightarrow \text{regole del gradiente: } \frac{df}{d\vec{w}} = \alpha 0 + \beta 0 = 0,$$

come già verificato.

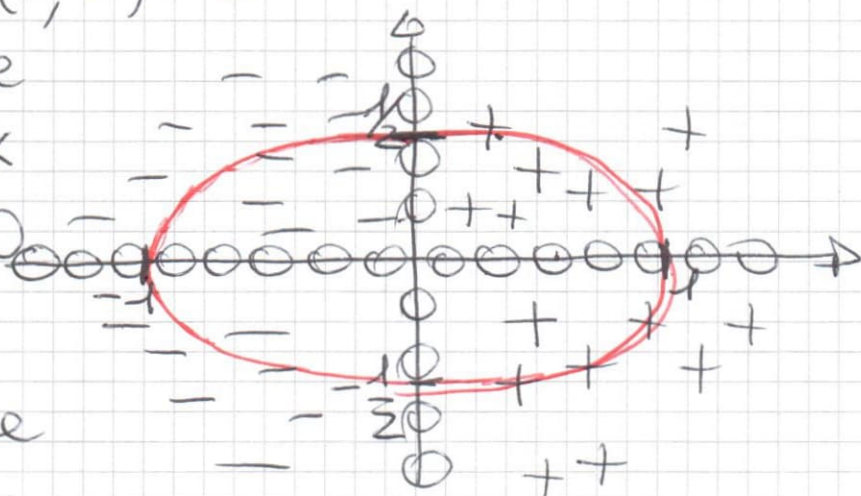
3) In D :

$$\begin{cases} f_x = 4y^2 = 0 \\ f_y = 8xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Tutti i punti sull'asse delle x sono punti stazionari. $f(x,0) = 0$

I punti sull'asse
negativo delle x
sono di **MASSIMO**
RELATIVO.

I punti sull'asse
positivo delle x
sono di **MINIMO RELATIVO**.
L'origine è punto di sella.



DD:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 4xy^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 1)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = 4y^2 - 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y = 8xy - 8\lambda y = 8y(x - \lambda) = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{cases}$$

Dalla 2^a equazione:

$$\begin{cases} y = 0 \\ \lambda x = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} \lambda = x \\ 4y^2 - 2x^2 = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \\ \lambda = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} \lambda = x \\ 3x^2 = 1 \\ y^2 = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

Se $\lambda = 0$, allora i punti sono stazionari liberi, cosa che abbiamo già verificato.

$$\begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \lambda \\ y = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

4 punti

Si osserva che f è simmetrica rispetto all'asse x , e antisimmetrica rispetto all'asse y . Questo dovrà ripercuotersi

6) la natura dei punti sella frontiera
inoltre:

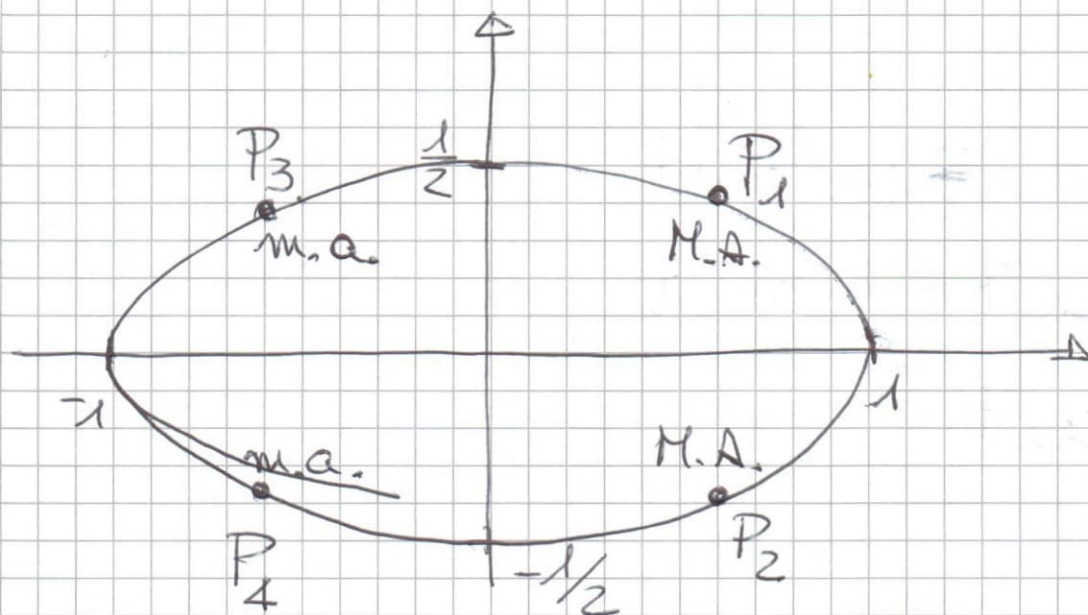
$$f(1,0) = -f(-1,0) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{1}{6} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = -f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

~~$P_1 = (1,0); P_2 = (-1,0)$~~ MAX. ASS.

$$\text{in } P_{1,2} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\text{MIN. ASS. in } P_{3,4} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$



Si ottengono gli stessi risultati usando la parametrizzazione dell'ellisse:

$$\begin{cases} x(\vartheta) = \cos \vartheta \\ y(\vartheta) = \frac{1}{2} \sin \vartheta \end{cases} \Rightarrow f(x,y) \Big|_{\partial D} = f(\vartheta) = \cos \vartheta \sin^2 \vartheta$$

$$f'(\vartheta) = -\sin^3 \vartheta + 2 \sin \vartheta \cos^2 \vartheta = \sin \vartheta (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)$$

$$= \sin \vartheta (2 \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \\ = \sin \vartheta (3 \cos^2 \vartheta - 1)$$

PUNTI STAZIONARI: $\sin \vartheta = 0 \Rightarrow \vartheta = 0, \pi$
 $\Rightarrow P_{5,6} = (\pm 1, 0)$

oppure

$$\cos^2 \vartheta = \frac{1}{3} \quad \text{cioè} \quad x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow P_{1,2,3,4}.$$

4) Ponendo

$$\vec{F}_1 = (3x^2, -\cos y, 2z)$$

$$\vec{F}_2 = (0, 0, 2y)$$

abbiamo $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

$\vec{F}_1$ è irrotazionale. $\vec{F}_2$ non lo è.

Poiché $\gamma(0) = (1, 0, 1) = \gamma(2\pi)$, siamo in presenza di una circonferenza.

Poiché $D = \mathbb{R}^2$ sempl. lin. connesso

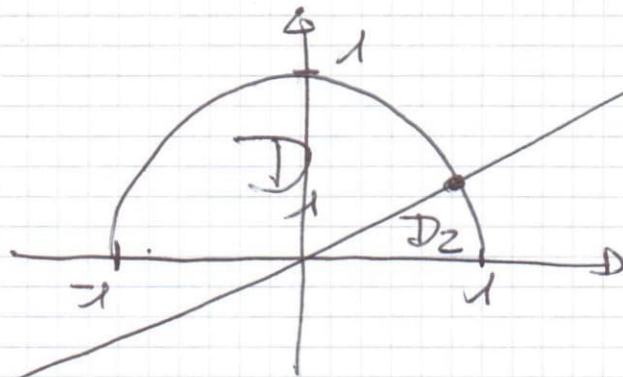
$$\Rightarrow \vec{F}_1 \text{ conservativo} \Rightarrow \oint \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow \oint_{2\pi} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{2\pi} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} =$$

$$\int_0^{2\pi} 2 \sin t \cdot (-\sin t) dt = - \int_0^{2\pi} 2 \sin^2 t dt$$

$$= \int_0^{2\pi} [\cos 2t - 1] dt = \left[\frac{1}{2} \sin 2t - t \right]_0^{2\pi} = -2\pi.$$

$$D = D_1 \cup D_2$$



8

In coordinate polare:

$$D_2 = \left\{ (r, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq 1; 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{6} \right\}$$

$$D_1 = \left\{ (r, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq 1; \frac{\pi}{6} \leq \vartheta \leq \pi \right\}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{3}y - x & \text{in } D_1 \\ x - \sqrt{3}y & \text{in } D_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \iint_D |\sqrt{3}y - x| dx dy = \iint_{D_1} (3\sqrt{3}y - x) dx dy$$

$$+ \iint_{D_2} (x - \sqrt{3}y) dx dy =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} d\vartheta \int_0^1 (\sqrt{3} \sin \vartheta - \cos \vartheta) \rho^2 d\rho$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\vartheta \int_0^1 (\cos \vartheta - \sqrt{3} \sin \vartheta) \rho^2 d\rho$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sqrt{3} \sin t - \cos t) \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 dt + \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos t - \sqrt{3} \sin t) \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 dt$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ \left[-\sqrt{3} \cos t - \sin t \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} + \left[\sin t + \sqrt{3} \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \right\}$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ \left(\sqrt{3} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \sqrt{3} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{3} \{ 2 + 2 \} = \frac{4}{3}$$

6) Abbassiamo l'ordine: $z = y'$

$$z'' + z = x^2 - 1$$

OMOGENEA ASSOCIATA: $x^2 + 1 = 0$

$$\Rightarrow z_0(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$z_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$z_p'(x) = 2Ax + B \quad z_p'' = 2A$$

$$\Rightarrow 2A + Ax^2 + Bx + C = x^2 - 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=0 \\ C+2A=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=0 \\ C=-3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = z = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 3$$



$$z(0) = z(0) = C_1 - 3 = 0 \Rightarrow C_1 = 3$$

$$z'(x) = -3 \sin x + C_2 \cos x + 2x$$

$$y''(0) = z'(0) = \underline{C_2 = 0}$$

$$\Rightarrow z(x) = 3 \cos x + x^2 - 3$$

$$y(x) = \int z(x) dx = 3 \sin x + \frac{x^3}{3} - 3x + C_3$$

$$y(0) = C_3 = 0$$

$$\Rightarrow y(x) = \underline{3 \sin x + \frac{x^3}{3} - 3x}$$