Concetti elementari sulla topologia in $I\!R^2$

Fissato un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0) \in I\!R^2$, si definisce **intorno circolare** di raggio r_0 di P_0 l'insieme dei punti $P \equiv (x, y) \in I\!R^2$ la cui distanza da P_0 è minore di r, cioè

$$B_r(x_0, y_0) := \{(x, y) \in I\!R^2 \mid \overline{PP_0} < r\} ,$$

dove ovviamente $\overline{PP_0} = dist(P, P_0)$ rappresenta l'usuale distanza euclidea:

$$\overline{PP_0} = dist(P, P_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} .$$

Dato un insieme $E \in I\!R^2$, si definisce **complementare di** E, e si indica con E^c, l'insieme dei punti di $I\!R^2$ che non appartengono a E:

$$E^c := \{(x, y) \in I\!R^2 \mid (x, y) \notin E\} .$$

Dato un insieme E, un punto P si dice **interno a** E se esiste almeno un suo intorno circolare costituito da soli punti di E, cioè tutto contenuto in E; **esterno a** E se esiste almeno un suo intorno circolare che non contiene alcun punto di E, cioè costituito da soli punti di E^c; **di frontiera per** E (e quindi per E^c) se in ogni suo intorno circolare cadono punti di E e di E^c; **di accumulazione per** E se in ogni suo intorno circolare cadono infiniti punti di E.

Indichiamo con E^0 l'insieme dei punti interni a E e con ∂E l'insieme costituito dai punti di frontiera di E.
Chiameremo E^0 **l'interno di** E; ∂E **la frontiera (o bordo) di** E; $\overline{E} := E \cup \partial E$ **la chiusura di** E.
Si ha $E^0 = E - \partial E$.

Un insieme E si dice **aperto** se ogni suo punto è punto interno e quindi se coincide con il suo interno E^0, ovvero ancora se non contiene alcun punto della sua frontiera; **chiuso** se il suo complementare è aperto, ovvero se contiene tutti i punti della sua frontiera, cioè se coincide con la sua chiusura $\overline{E}$.

Un insieme E si dice **limitato** se esiste un $r > 0$ tale che E sia contenuto nel cerchio

$$C = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\} .$$

Un insieme E si dice **connesso (per archi)** se per ogni coppia di punti $P, Q \in E$ esiste un arco continuo contenuto in E che abbia per estremi P e Q.