Foglio di esercizi 2 - 14 Marzo 2019
Probabilità e statistica – Ingegneria Meccanica
Alessandro Ciallella

Esercizio 1. Un campione di 10 studenti, che non contiene ripetizioni, è ottenuto da una popolazione di quattro classi formate da 25 studenti ciascuna.

(a) Qual è la probabilità che 6 studenti del campione provengano dalla stessa classe (evento A)?

(b) Calcolare la probabilità che almeno una delle classi non sia rappresentata nel campione (evento B).

Soluzione.
(a) Identifichiamo le quattro classi con 1, 2, 3 e 4. Al variare di $i = 1, 2, 3, 4$, definiamo gli eventi K_i ={esattamente 6 studenti del campione provengono dalla classe i}.
Vale $A = \cup_{i=1}^4 K_i$ e gli eventi K_i sono a due a due disgiunti ($K_i \cap K_j = \emptyset$ per $i \neq j$). Ciascuno degli eventi K_i ha probabilità

$$P(K_i) = \frac{\binom{25}{6}\binom{75}{4}}{\binom{100}{10}}, \; \forall\; i = 1, \ldots, 4.$$

Ne segue che la probabilità di A è

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{4} K_i\right) = \sum_{i=1}^{4} P(K_i) = 4\frac{\binom{25}{6}\binom{75}{4}}{\binom{100}{10}} \cong 0.0497$$

(b) Definiamo gli eventi C_i ={la classe i non è rappresentata nel campione}, per $i = 1, 2, 3, 4$.
Vale $B = \bigcup_{i=1}^{4} C_i$, ma non si tratta di eventi disgiunti. Infatti osserviamo che, al variare degli indici tra 1 e 4, $P(C_i) = \binom{75}{10}/\binom{100}{10}$, per $i = 1, \ldots, 4$, mentre $P(C_i \cap C_j) = \binom{50}{10}/\binom{100}{10}$, per $i \neq j$; $P(C_i \cap C_j \cap C_k) = \binom{25}{10}/\binom{100}{10}$, per $i \neq j \neq k \neq i$. Infine $P(C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4) = 0$. Utilizzando il principio di inclusione esclusione

$$\begin{aligned} P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{4} C_i\right) &= \sum_{i=1}^{4} P(C_i) - \sum\sum_{i<j} P(C_i \cap C_j) + \sum\sum\sum_{i<j<k} P(C_i \cap C_j \cap C_k) \\ &= \binom{4}{1}\frac{\binom{75}{10}}{\binom{100}{10}} - \binom{4}{2}\frac{\binom{50}{10}}{\binom{100}{10}} + \binom{4}{3}\frac{\binom{25}{10}}{\binom{100}{10}} \cong 0.188 \end{aligned}$$

Esercizio 2. Si effettuano estrazioni senza reimmissione da un'urna che contiene 90 palline, 45 rosse e 45 nere. Calcolare la probabilità p_{13} che la prima e la terza pallina estratta siano rosse. Calcolare la probabilità p_1 che estraendo 5 palline si ottengano più palline rosse che palline nere.

Soluzione.
Definiamo gli eventi R_i ={all'i–esima estrazione viene estratta una rossa} e N_i ={all'i–esima estrazione viene estratta una nera}. Calcolare p_{13} vuol dire calcolare $P(R_1 \cap R_3)$. Usando la regola del prodotto e poi condizionando rispetto all'esito della seconda estrazione otteniamo

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap R_3) = P(R_1)P(R_3|R_1) &= P(R_1)[P(R_3|R_1 \cap R_2)P(R_2|R_1) + P(R_3|R_1 \cap N_2)P(N_2|R_1)] \\ &= \frac{45}{90}\left[\frac{43}{88}\frac{44}{89} + \frac{44}{88}\frac{45}{89}\right] = \frac{1}{4} \cdot \frac{88}{89} = \frac{22}{89} \cong 0.247 \end{aligned}$$

In alternativa si poteva più semplicemente osservare che, non essendoci informazioni sull'esito della seconda estrazione, vale $p_{13} = P(R_1 \cap R_3) = P(R_1 \cap R_2) = (1/2) \cdot (44/89) = 22/89$.

L'evento A ={vengono estratte più rosse che nere} è unione disgiunta degli eventi B_i ={vengono estratte esattamente i rosse}, per $i = 3, 4, 5$. Quindi

$$p_1 = P(A) = P\left(\bigcup_{i=3}^{5} B_i\right) = P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) = \frac{\binom{45}{3}\binom{45}{2}}{\binom{90}{5}} + \frac{\binom{45}{4}\binom{45}{1}}{\binom{90}{5}} + \frac{\binom{45}{5}\binom{45}{0}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{2}$$

come si sarebbe potuto dedurre anche osservando che vista la particolare simmetria del problema $P(A) = P(A^C)$.

Esercizio 3. Un'urna contiene 50 palline, 30 rosse e 20 blu. Si estraggono 10 palline senza reimmissione. Calcolare la probabilità di estrarre almeno 6 palline dello stesso colore. Calcolare la probabilità che la prima rossa venga estratta alla seconda estrazione e l'ultima rossa venga estratta alla decima estrazione.

Soluzione.
Definendo l'evento A ={almeno 6 palline hanno lo stesso colore}, si nota che il complementare è A^C ={vengono estratte 5 rosse e 5 blu}. Ne segue che

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^C) = 1 - \frac{\binom{30}{5}\binom{20}{5}}{\binom{50}{10}} \cong 1 - 0.215 = 0.785.$$

Chiamando B_i e R_i rispettivamente gli eventi pallina blu e pallina rossa estratta alla i–esima estrazione, l'altro evento di cui vogliamo calcolare la probabilità può essere scritto come $B_1 \cap R_2 \cap R_{10}$. Utilizzando l'osservazione che $P(B_1 \cap R_2 \cap R_{10}) = P(B_1 \cap R_2 \cap R_3)$, troviamo

$$P(B_1 \cap R_2 \cap R_{10}) = P(B_1)P(R_2|B_1)P(R_{10}|B_1 \cap R_2) = \frac{20}{50}\frac{30}{49}\frac{29}{48} = \frac{29}{196} \cong 0.148,$$

dove come detto abbiamo utilizzato che $P(R_{10}|B_1 \cap R_2) = P(R_3|B_1 \cap R_2) = 29/48$.

Esercizio 4. Un'urna contiene 10 palline bianche e 15 nere. Si effettuano estrazioni senza reimmissione. Determinare la probabilità di E che si estraggano 2 palline nere e 1 bianca. Ora si estraggano 22 palline, determinare la probabilità di H che nell'urna rimangano 2 palline nere e 1 bianca. Commentare il risultato.

Soluzione.
H coincide con estrarre 13 nere e 9 bianche. Allora

$$P(E) = \frac{\binom{15}{2}\binom{10}{1}}{\binom{25}{3}} = P(H) = \frac{\binom{15}{13}\binom{10}{9}}{\binom{25}{22}} \cong 0.4565$$

dove si è usata l'identità $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Esercizio 5. Una popolazione studentesca è costituita da quattro classi formate da 25 studenti ciascuna. Si determina un campione (tra una estrazione e l'altra vi è reimmissione) fino ad ottenere almeno uno studente per ciascuna classe. Trovare la probabilità che sia necessario estrarre n campioni.
Soluzione.
Definiamo l'evento A_n ={all'n–esima estrazione c'è ancora almeno una classe non rappresentata}. Identifichiamo le classi come classe $1, 2, 3, 4$. Definendo gli eventi C_i ={all'n-esima estrazione la classe i non è rappresentata}, per $i = 1, 2, 3, 4$, dato che $A_n = \bigcup_{i=1}^{4} C_i$ e che gli eventi C_i non sono disgiunti, calcoliamo $P(A_n)$ grazie al principio di inclusione esclusione. Al variare degli indici tra 1 e 4, si trova $P(C_i) = (75/100)^n$; $P(C_i \cap C_j) = (50/100)^n$, per $i \neq j$; $P(C_i \cap C_j \cap C_k) = (25/100)^n$, per $i \neq j \neq k \neq i$. Infine $P(C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4) = 0$, pertanto

$$\begin{aligned} P(A_n) = P\left(\bigcup_{i=1}^{4} C_i\right) &= \sum_{i=1}^{4} P(C_i) - \sum\sum_{i<j} P(C_i \cap C_j) + \sum\sum\sum_{i<j<k} P(C_i \cap C_j \cap C_k) \\ &= \binom{4}{1}\left(\frac{75}{100}\right)^n - \binom{4}{2}\left(\frac{50}{100}\right)^n + \binom{4}{3}\left(\frac{25}{100}\right)^n \\ &= 4\left(\frac{3}{4}\right)^n - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{aligned}$$

Si noti che vale l'inclusione $A_n \subseteq A_{n-1}$, perché una sequenza di estrazioni che dopo n estrazioni non ha mai pescato studenti da almeno una classe è a maggior ragione una sequenza che nelle prime $n-1$ estrazioni non ha pescato da tutte le classi. Ora, l'evento da studiare è B_n={l'n–esima estrazione dà il primo campione con almeno uno studente per ogni classe}, che conterrà invece quelle sequenze di estrazioni che all'$(n-1)$–esima estrazione hanno ancora una classe scoperta (cioè sono sequenze appartenenti ad A_{n-1}) ma all'n–esima coprono tutte le classi (cioè sono in A_n^C). Quindi $B_n = A_{n-1} \cap A_n^C$. Da quanto detto segue che
$A_{n-1} = (A_{n-1} \cap A_n) \cup (A_{n-1} \cap A_n^C) = A_n \cup B_n$, dove $A_n \cap B_n = \emptyset$ e quindi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(A_{n-1}) - \mathbb{P}(A_n) &= 4\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left[1 - \frac{3}{4}\right] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left[1 - \frac{1}{2}\right] + 4\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left[1 - \frac{1}{4}\right] \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

Esercizio 6. I componenti prodotti da una certa azienda possono presentare due difetti, con percentuale rispettivamente del 3 e del 7 per cento. I due tipi di difetti si possono produrre in momenti diversi della produzione, e pertanto possiamo assumere che le presenze dell'uno o dell'altro siano tra loro indipendenti.
a) Quale è la probabilità che un componente presenti entrambi i difetti?
b) Quale è la probabilità che presenti il difetto 1, sapendo che è difettoso?
c) Quale è la probabilità che presenti solo uno dei due difetti, sapendo che è difettoso?
Soluzione.
Siano A e B rispettivamente gli eventi "è presente il difetto 1" ed "è presente il difetto 2".
a) Data l'indipendenza $P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{3}{100}\frac{7}{100} = \frac{21}{10000}$.
b) Osservando che l'evento "il componente è difettoso" coincide con $A \cup B$, si calcola

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{100} + \frac{7}{100} - \frac{21}{10000}.$$

La probabilità che sia presente il difetto 1 per un componente difettoso è

$$P(A|A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{\frac{3}{100}}{\frac{979}{10000}} = \frac{300}{979} \cong 0.3064.$$

c) L'evento cercato è $[((A \cap B^C) \cup (A^C \cap B))|A \cup B]$ e gli eventi nella unione $((A \cap B^C) \cup (A^C \cap B))$ sono disgiunti. Utilizzando l'indipendenza

$$P((A \cap B^C)|(A \cup B)) = \frac{P((A \cap B^C) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B^C)}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)P(B^C)}{P(A \cup B)} = \frac{3 \cdot 93}{979} \cong 0.285$$

In maniera simile si trova

$$P((A^C \cap B)|(A \cup B)) = \frac{P(A^C \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{P(A^C)P(B)}{P(A \cup B)} = \frac{97}{\cancel{100}}\frac{7}{\cancel{100}}\frac{\cancel{10000}}{979} \cong 0.6936$$

Sommando si trova la probabilità cercata $\mathbb{P}[(AB^C \cup A^C B)|A \cup B] = \frac{958}{979} \cong 0.9786$.

Esercizio 7. Due lotti hanno la stessa composizione, 5 pezzi difettosi e 2 pezzi buoni. Dal primo lotto si effettuano estrazioni senza reimmissione, calcolare la probabilità p_{23} che il secondo e terzo pezzo estratto siano difettosi. I pezzi buoni estratti in 3 estrazioni senza reimmissione dal primo lotto vengono inseriti nel secondo lotto mentre i pezzi difettosi vengono scartati, si effettua un'estrazione in blocco di 4 pezzi dal secondo lotto. Si calcoli la probabilità p che escano almeno 3 pezzi buoni. Supposto che siano estratti 3 pezzi buoni dal secondo lotto qual è la probabilità α che alla prima estrazione siano stati estratti 2 pezzi buoni?
Soluzione.
Detti B_i e D_i gli eventi "estratto pezzo buono all'i–esima estrazione dal primo lotto" e "estratto difettoso all'i–esima dal primo lotto" la probabilità p_{23} corrisponde a $P(D_2 \cap D_3)$, si può trovare semplicemente osservando che $P(D_2 \cap D_3) = P(D_1 \cap D_2) = (5/7)(4/6) = 10/21$. In alternativa condizionando all'esito della prima estrazione:

$$P(D_2 \cap D_3) = P(D_2 \cap D_3|D_1)P(D_1) + P(D_2 \cap D_3|B_1)P(B_1) = \frac{4}{6}\frac{3}{\cancel{5}}\frac{\cancel{5}}{7} + \frac{\cancel{5}}{6}\frac{4}{\cancel{5}}\frac{2}{7} = \frac{10}{21} \cong 0.4762$$

La probabilità p si può calcolare condizionando all'esito delle estrazioni dal primo lotto. Definiamo A_i={esattamente i pezzi buoni estratti dal secondo lotto}, $i = 0, 1, 2, 3, 4$; B_j={esattamente j pezzi buoni estratti dal primo lotto}, $j = 0, 1, 2$

$$P(A_3) = \sum_{j=0}^{2} P(A_3|B_j)P(B_j) = 0 + \frac{\binom{3}{3}\binom{5}{1}}{\binom{8}{4}} \frac{\binom{2}{1}\binom{5}{2}}{\binom{7}{3}} + \frac{\binom{4}{3}\binom{5}{1}}{\binom{9}{4}} \frac{\binom{2}{2}\binom{5}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{4}{63} \cong 0.0635$$

$$P(A_4) = \sum_{j=0}^{2} P(A_4|B_j)P(B_j) = 0 + 0 + \frac{\binom{4}{4}\binom{5}{0}}{\binom{9}{4}} \frac{\binom{2}{2}\binom{5}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{882} \cong 0.00113$$

Ne segue che $p = P(A_3) + P(A_4) = 19/294 \cong 0.0646$
Dalla formula di Bayes

$$\alpha = P(B_2|A_3) = P(A_3|B_2)\frac{P(B_2)}{P(A_3)} = \frac{\binom{4}{3}\binom{5}{1}}{\binom{9}{4}} \frac{\binom{2}{2}\binom{5}{1}}{\binom{7}{3}} \frac{63}{4} = \frac{5}{14} \cong 0.3571$$

Esercizio 8. In un sacchetto ci sono due monete, di cui una è regolare e l'altra è truccata, perché presenta testa da entrambi i lati. Viene estratta una moneta a caso e se ne guarda una sola faccia: è testa. Quale è la probabilità che si tratti della moneta regolare?
Soluzione.
Detto T l'evento che la faccia visibile è testa, E l'evento che la moneta sia quella equa e E^C che sia quella truccata. La probabilità cercata è data dalla formula di Bayes

$$P(E|T) = \frac{P(E \cap T)}{P(E)} = \frac{P(T|E)P(E)}{P(T|E)P(E) + P(T|E^C)P(E^C)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Esercizio 9. Una fabbrica produce circuiti stampati di cui il 6% ha un difetto di tipo A ed il 4% ha un difetto di tipo B. I due difetti possono essere presenti contemporaneamente in uno stesso circuito in modo indipendente l'uno dall'altro. Prima di mettere in vendita i circuiti prodotti viene fatta un'ispezione elettronica, che individua correttamente come difettosi il 95% dei circuiti con il difetto A ed il 75% dei circuiti con il difetto B, ma individua incorrettamente come difettosi il 10% dei circuiti che non lo sono. Tutti i circuiti identificati come difettosi vengono eliminati, e gli altri vengono messi in vendita. Con quale probabilità p_1 un circuito con difetto di tipo A viene messo in vendita? E p_2 uno con difetto di tipo B? Con che probabilità p_3 un circuito scelto a caso viene messo in vendita?
Supposto che un circuito è stato messo in vendita, qual è la probabilità che sia difettoso p?
Soluzione.
Definiamo gli eventi A ={è presente il difetto A}, B ={è presente il difetto B}, V ={il circuito viene messo in vendita}, allora $p_1 = P(V|A)$, $p_2 = P(V|B)$

$$\begin{aligned} p_1 = P(V|A) &= P(V|(A \cap B^C))P(B^C|A) + P(V|(A \cap B))P(B|A) \\ &= \frac{5}{100}\frac{96}{100} + \frac{5}{100}\frac{25}{100}\frac{4}{100} = \frac{97}{2000} = 0.0485 \end{aligned}$$

$$p_2 = P(V|B) = P(V|(A^C \cap B))P(A^C|B) + P(V|(A \cap B))P(A|B)$$
$$= \frac{25}{100}\frac{94}{100} + \frac{5}{100}\frac{25}{100}\frac{6}{100} = \frac{943}{4000} = 0.23575,$$
dove si è usata l'indipendenza di A e B.

Per calcolare $p_3 = P(V)$ utilizziamo la legge delle probabilità totali, partizionando lo spazio campionario negli eventi $A \cap B^C$, $A^C \cap B$, $A \cap B$, $(A \cup B)^C$. Utilizzando l'indipendenza si trova $P(A \cap B^C) = 6 \cdot 96 \times 10^{-4}$, $P(A^C \cap B) = 4 \cdot 94 \times 10^{-4}$, $P(A \cap B) = 6 \cdot 4 \times 10^{-4}$. Dalle leggi di De Morgan $P((A \cup B)^C) = P(A^C \cap B^C) = P(A^C)P(B^C) = (94 \cdot 96) \times 10^{-4}$. Allora

$$\begin{aligned} p_3 = P(V) =& P(V|A \cap B^C)P(A \cap B^C) + P(V|A^C \cap B)P(A^C \cap B) + P(V|A \cap B)P(A \cap B) \\ &+ P(V|(A \cup B)^C)P((A \cup B)^C) \\ =& \frac{5}{100}\frac{6 \cdot 96}{10^4} + \frac{25}{100}\frac{4 \cdot 94}{10^4} + \frac{125}{10^4}\frac{6 \cdot 4}{10^4} + \frac{90}{100} \cdot \frac{9024}{10^4} = \frac{82447}{10^5} = 0.82447 \end{aligned}$$

Infine, $p = P((A \cup B)|V)$, osservando che $A \cup B = (A \cap B^C) \cup (A^C \cap B) \cup (A \cap B)$, dove gli eventi a secondo membro sono disgiunti, e poi applicando la formula di Bayes

$$\begin{aligned} p &= P((A \cap B^C) \cup (A^C \cap B) \cup (A \cap B)|V) = P(A \cap B^C|V) + \mathbb{P}(A^C \cap B|V) + \mathbb{P}(A \cap B|V) \\ &= P(V|A \cap B^C)\frac{P(A \cap B^C)}{P(V)} + P(V|A^C \cap B)\frac{P(A^C \cap B)}{P(V)} + P(V|A \cap B)\frac{P(A \cap B)}{P(V)} \\ &= \frac{10^5}{82447} \cdot \left[\frac{5}{100}\frac{6 \cdot 96}{10^4} + \frac{25}{100}\frac{4 \cdot 94}{10^4} + \frac{125}{10^4}\frac{6 \cdot 4}{10^4}\right] \cong 0.01493 \end{aligned}$$

Esercizio 10. Per valutare la resistenza dei propri pneumatici la casa di produzione *Fridgestone* effettua dei *test drive* lungo delle strade di montagna. I tecnici suppongono che la probabilità di slittare sia pari a $2 \cdot 10^{-2}$ se non c'è ghiaccio, ad $8 \cdot 10^{-2}$ se c'è ghiaccio. Due curve su tre presentano ghiaccio e ad ogni curva si può slittare in maniera indipendente. Calcolare la probabilità p di slittare ad una curva. Si effettua un *test drive* su un tracciato con 10 curve. Calcolare la probabilità p_0 che il veicolo non slitti ad alcuna curva durante il test.
Soluzione.
Detto S l'evento "il veicolo slitta ad una curva", G l'evento "è presente il ghiaccio ad una curva", si trova

$$p = P(S) = P(S|G)P(G) + P(S|G^C)P(G^C) = \frac{8}{100}\frac{2}{3} + \frac{2}{100}\frac{1}{3} = \frac{3}{50} = 0.06$$

p_0 è invece la probabilità che in tutte e dieci le curve indipendentemente non accada di slittare. La probabilità p_0 si può allora esprimere come $p_0 = (1-p)^{10} \cong 0.5386$