Foglio di esercizi 3 - 29 Marzo 2019
Probabilità e statistica – Ingegneria Meccanica
Alessandro Ciallella

Esercizio 1. Una compagnia aerea dispone di un aereo da 20 posti e di uno da 10 posti. Poiché si sa che i passeggeri che prenotano non si presentano (indipendentemente uno dall'altro) con una probabilità del 10%, vengono accettate 22 prenotazioni sui voli con 20 posti e 11 su quelli da 10. Per quale dei due tipi di aereo è maggiore la probabilità di lasciare a terra almeno un passeggero per un volo per il quale si è accettato il massimo di prenotazioni?
Soluzione.
Vista l'indipendenza, il numero di passeggeri X_1 che si presenta sul primo aereo con 20 posti e 22 prenotazioni accettate è una v.a. con distribuzione binomiale di parametri $(22, 9/10)$, mentre il numero di passeggeri X_2 che si presenta sul secondo aereo con 10 posti e 11 prenotazioni accettate è una v.a. con distribuzione binomiale di parametri $(11, 9/10)$.

La probabilità di lasciare a terra almeno un passeggero è per il primo volo

$$P(X_1 \geq 21) = \binom{22}{21}\left(\frac{9}{10}\right)^{21} \cdot \frac{1}{10} + \binom{22}{22}\left(\frac{9}{10}\right)^{22} \cong 0.339$$

mentre per il secondo

$$P(X_2 = 11) = \binom{11}{11}\left(\frac{9}{10}\right)^{11} \cong 0.314$$

quindi è maggiore per il primo volo.

Esercizio 2. Nel gioco del lotto ad ogni estrazione cinque numeri vengono estratti in blocco da un'urna che contiene 90 palline numerate da 1 a 90. Fissato un numero, ad esempio il 67, indichiamo con p la probabilità che esso esca in una singola estrazione.
a) Quanto vale p? In media ogni quante estrazioni viene estratto il 67?
b) Qual è la probabilità che dopo 30 estrazioni il 67 non sia ancora uscito?
c) Supponiamo che nelle prime 100 estrazioni il 67 non sia mai uscito. Qual è la probabilità che esso esca entro la 101–esima? Qual è la probabilità che esca dopo la 130–esima?
d) Qual è la probabilità che esso esca almeno 3 volte nelle prime 30 estrazioni?
Soluzione.

a) p si riconduce alla distribuzione ipergeometrica: la probabilità di estrarre 1 pallina dal gruppo formato dal solo elemento 67 e 4 dal gruppo dei restanti 89 in 5 estrazioni senza rimpiazzo é

$$p = \frac{\binom{1}{1}\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$$

Poiché le estrazioni sono indipendenti tra loro, il numero T di estrazioni che trascorrono fino alla prima estrazione del 67 segue una distribuzione geometrica di parametro $p = 1/18$. Il valore atteso di T è quindi $\mathbb{E}(T) = 1/p = 18$.

b) Corrisponde alla probabilità che $T > 30$, cioè, usando le somme geometriche

$$P(T > 30) = \sum_{k=31}^{\infty} P(T = k) = \sum_{k=31}^{\infty} p(1-p)^{k-1} = p\frac{(1-p)^{30}}{1-(1-p)} = (1-p)^{30} = \left(\frac{17}{18}\right)^{30}$$

In alternativa si può notare che il numero di volte X in cui viene estratto il 67 in 30 estrazioni segue una distribuzione binomiale di parametri 30 e $p = 1/18$. L'evento cercato corrisponde a $X = 0$ e

$$P(X = 0) = \binom{30}{0}(1-p)^{30} = \left(\frac{17}{18}\right)^{30} \cong 0.18$$

c) Per la proprietà di assenza di memoria della geometrica

$$P(T = 101|T > 100) = P(T = 1) = p$$

$$P(T > 130|T > 100) = P(T > 30) = (1-p)^{30}$$

d) Il numero di volte X in cui viene estratto il 67 in 30 estrazioni segue una distribuzione binomiale di parametri 30 e $p = 1/18$. L'evento cercato è $X \geq 3$, quindi

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \Big(P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)\Big) =$$
$$= 1 - (1-p)^{30} - \binom{30}{1}p(1-p)^{29} - \binom{30}{2}p^2(1-p)^{28} \cong 0.231$$

Esercizio 3. Una fabbrica produce componenti elettronici. Questi escono da due linee di produzione, A e B, nelle proporzioni del 30% e 70% rispettivamente. La linea A ha una percentuale di pezzi difettosi del 10%, contro 17% per B.
a) Qual è la probabilità che un componente scelto a caso sia difettoso?

b) I componenti sono venduti in confezioni di 10 pezzi, tutti prodotti dalla stessa linea. Una di queste viene ispezionata e risulta contenere un pezzo difettoso. É più probabile che provenga dalla linea A oppure dalla linea B?

Soluzione.

a) Indichiamo con A, B e D rispettivamente gli eventi "il pezzo proviene dalla linea A", "il pezzo proviene dalla linea B" e "il pezzo è difettoso". Vale $B = A^C$ e

$$P(A) = \frac{3}{10} \qquad P(B) = \frac{7}{10} \qquad P(D|A) = \frac{1}{10} \qquad P(D|B) = \frac{17}{100}$$

La probabilità che un pezzo scelto a caso sia difettoso è allora data dalla formula delle probabilità totali

$$P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|A^C)P(A^C) = \frac{1}{10}\frac{3}{10} + \frac{17}{100}\frac{7}{10} = 0.149$$

b) Sia X il numero di pezzi difettosi in una confezione di 10 pezzi provenienti dalla stessa linea. Siccome i 10 pezzi provengono da un lotto di numerosità molto più grande di 10, si può approssimare la distribuzione ipergeometrica con una binomiale e dunque $X|A \sim Bi(10, 0.1)$ mentre $X|B \sim Bi(10, 0.17)$. Inoltre

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(X = 1|A)P(A) + P(X = 1|B)P(B) = \\ &= \binom{10}{1} \cdot 0.1 \cdot (0.9)^9 \cdot 0.3 + \binom{10}{1} \cdot 0.17 \cdot (0.83)^9 \cdot 0.7 \end{aligned}$$

Ora, per valutare se è più probabile che la confezione venga dalla linea A oppure B, si guarda la distribuzione aggiornata tramite il teorema di Bayes:

$$P(A|X = 1) = \frac{P(X = 1|A) \cdot P(A)}{P(X = 1)}$$
$$P(B|X = 1) = \frac{P(X = 1|B) \cdot P(B)}{P(X = 1)}$$

Studiando il rapporto tra le due si verifica che è minore di 1 :

$$\frac{P(A|X = 1)}{P(B|X = 1)} = \frac{\frac{P(X=1|A)\cdot P(A)}{\cancel{P(X=1)}}}{\frac{P(X=1|B)\cdot P(B)}{\cancel{P(X=1)}}} = \frac{\cancel{\binom{10}{1}} \cdot 0.1 \cdot (0.9)^9 \cdot 0.3}{\cancel{\binom{10}{1}} \cdot 0.17 \cdot (0.83)^9 \cdot 0.7} < 1,$$

da cui si deduce che il denominatore è più grande, cioè è più probabile che la confezione provenga dalla linea B.

Esercizio 4. Un collezionista ha già raccolto 60 delle 100 figurine di un album. Egli acquista una busta contenente 24 figurine (tutte diverse tra loro), tra le quali vi

possono essere figurine che già possiede. Qual è la probabilità che tra le 24 appena acquistate ve ne siano esattamente 15 di quelle che già possiede? In media quante nuove figurine troverà nella busta?
Soluzione.
Sia X il numero di nuove figurine presenti tra le 24 acquistate. La X ha distribuzione ipergeometrica, con 24 estratte da 100, di cui 60 "possedute" e 40 "nuove". Quindi la probabilità di ottenere k figurine nuove è

$$P(X = k) = \frac{\binom{40}{k}\binom{60}{24-k}}{\binom{100}{24}}, \quad k = 0, 1, \ldots, 24.$$

Trovare esattamente 15 figurine già possedute corrisponde a trovarne esattamente 9 nuove, per cui la probabilità è

$$P(X = 9) = \frac{\binom{40}{9}\binom{60}{15}}{\binom{100}{24}} \cong 0.18$$

Ricordando il valore atteso di una v.a. ipergeometrica troviamo

$$\mathbb{E}(X) = 24 \cdot \frac{40}{100} = \frac{48}{5} = 9.6.$$

Esercizio 5. Una compagnia di assicurazioni ha un numero $N = 2 \cdot 10^4$ di assicurati contro un rischio che ha una probabilità $p = 5 \cdot 10^{-5}$ di colpire ogni singolo assicurato nel corso dell'anno. Sia X il numero di assicurati che la compagnia sarà chiamata ad indennizzare nel corso dell'anno. Se si può supporre che eventi per assicurati diversi siano indipendenti, come è ragionevole pensare la $P(X = k)$, $k = 0, 1, 2 \ldots$? Se la compagnia percepisce da ogni assicurato un premio annuale pari a $\frac{9}{4}pI$, dove I è l'indennizzo versato all'assicurato in caso di incidente, qual è in media il guadagno della compagnia in un anno?
Qual è la probabilità che avverranno almeno tre incidenti da indennizzare nel corso dell'anno?
Soluzione.
Il numero di assicurati indennizzati nel corso dell'anno seguirà una distribuzione binomiale di parametri N e p. Tuttavia, poiché N è grande e p è piccola la distribuzione di X si può approssimare con una distribuzione di Poisson che abbia lo stesso valore atteso, cioè di parametro $\lambda = Np = 1$.

La compagnia incassa ogni anno $N \cdot \frac{9}{4}pI$ e paga in indennizzi $X \cdot I$. Il valore atteso di X è pari a $\lambda = Np = 1$, per cui in media il guadagno della società sarà

$$\mathbb{E}(N \cdot \frac{9}{4}pI - X \cdot I) = \frac{9}{4}NpI - I \cdot \mathbb{E}(X) = \frac{5}{4}I.$$

La probabilità che vengano indennizzate almeno 3 persone è data da

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 3) &= 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) \\
&\approx 1 - \mathrm{e}^{-\lambda} - \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} - \frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\lambda} = 1 - \frac{5}{2\mathrm{e}} \cong 0.0803
\end{aligned}
$$

Esercizio 6. Un'urna A contiene n palline tutte rosse. Un'urna B contiene n palline di cui r rosse ($1 \leq r < n$) e le rimanenti $n - r$ nere. Si sceglie a caso un'urna e da essa si effettua una successione di estrazioni con rimpiazzo.
a) Qual è la probabilità che la prima estratta sia rossa?
b) Qual è la probabilità che le prime due palline abbiano colori diversi?
c) Quante estrazioni sono necessarie in media per veder comparire per la prima volta una pallina rossa?
d) Sapendo che le prime k palline estratte sono rosse, qual è la probabilità che l'urna dalla quale sono state estratte sia la A?
Soluzione.
a) Definiamo gli eventi $A = \{$viene scelta l'urna $A\}$, $B = \{$ viene scelta l'urna $B\}$, $R_i = \{$alla i–esima estrazione si ottiene una rossa$\}$. Poiché $A^C = B$, gli eventi A e B sono una partizione dell'evento certo, per cui possiamo scrivere

$$
\begin{aligned}
P(R_1) = P(R_1 \cap A) + P(R_1 \cap B) =& P(R_1|A)P(A) + P(R_1|B)P(B) \\
=& 1 \cdot 1/2 + r/n \cdot 1/2 = 1/2(1 + r/n).
\end{aligned}
$$

b) Chiamando C l'evento "le prime due estratte hanno colori diversi", osserviamo che C è impossibile se si è scelta l'urna A e che il numero di rosse estratte dall'urna B in due estrazioni ha distribuzione binomiale di parametri $(2, r/n)$. Quindi

$$
P(C) = P(C|A) \cdot P(A) + P(C|B) \cdot P(B) = 0 + 2 \cdot \frac{r}{n}\left(1 - \frac{r}{n}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{r(n-r)}{n^2}.
$$

c) Chiamiamo T la v.a. che indica il numero di estrazioni necessarie fino a veder comparire una rossa per la prima volta, e calcoliamone la distribuzione utilizzando di nuovo la legge delle probabilità totali:

$$
P(T = k) = P(T = k|A)P(A) + P(T = k|B)P(B).
$$

Se l'urna scelta è la A, la prima estrazione dà rossa, quindi

$$
P(T = k|A) = \begin{cases} 1 & se\, k = 1 \\ 0 & altrimenti \end{cases}
$$

mentre se l'urna scelta è la B, la v.a. $T|B$ ha distribuzione geometrica con parametro $p = r/n$. Il valore atteso di T è allora

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(T = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (P(T = k|A)P(A) + P(T = k|B)P(B)) =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p(1-p)^k = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{n}{r}\right)$$

dove si è usato che l'attesa di una geometrica di parametro p è $1/p$.
d) Detto $E_k = R_1 \cap R_2 \cap \dots R_k$ l'evento "le prime k estratte sono tutte rosse", dobbiamo scrivere $P(A|E_k)$. Per la formula di Bayes

$$P(A|E_k) = \frac{P(E_k|A) \cdot P(A)}{P(E_k)}$$

dove $P(E_k|A) = 1$ e $P(A) = \frac{1}{2}$, mentre utilizzando la legge delle probabilità totali

$$P(E_k) = P(E_k|A)P(A) + P(E_k|B)P(B) = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{r}{n}\right)^k\right)$$

visto che $P(E_k|B) = P(R_1 \cap \dots \cap R_k|B) = P(R_1|B) \cdot \ldots \cdot P(R_k|B) = \left(\frac{r}{n}\right)^k$. Quindi

$$P(A|E_k) = \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{n}\right)^k}.$$

Esercizio 7. Un'urna contiene 200 palline rosse ed 800 nere. Vengono fatte delle estrazioni successive, in ciascuna delle quali vengono prese simultaneamente 5 palline, che vengono poi reinserite nell'urna. Indichiamo con N il numero di estrazioni necessario a ottenere per la prima volta l'estrazione di 5 palline tutte rosse. Quanto vale $\mathbb{E}(N)$?
Il risultato cambierebbe se nell'urna ci fossero 10 rosse e 40 nere?
Soluzione.
Chiamiamo A l'evento "vengono estratte 5 rosse su 5 dall'urna con 1000 palline". Calcoliamo $p = P(A)$: utilizzando la distribuzione ipergeometrica

$$p = P(A) = \frac{\binom{200}{5}\binom{800}{0}}{\binom{1000}{5}} = \frac{200 \cdot 199 \cdot \ldots \cdot 196}{1000 \cdot 999 \cdot \ldots \cdot 996} \cong 0.0003074$$

Ripetendo l'estrazione del blocco di 5 palline e reiserendo se non sono tutte rosse, abbiamo poi prove indipendenti ripetute finché A non si realizza, per cui N ha distribuzione geometrica di parametro p. Ne segue che $\mathbb{E}(N) = 1/p \cong 3253.71$

Cambiando l'urna chiamiamo B l'evento "vengono estratte 5 rosse su 5 dall'urna con 50 palline".

$$P(B) = \frac{\binom{10}{5}}{\binom{50}{5}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46} \cong 0.000119$$

La prima estrazione di 5 rosse in blocco avviene in questo caso in media dopo $1/P(B) = 8407.\bar{7}$ estrazioni.

Si noti che mantenendo fissata la proporzione iniziale tra rosse e nere di 1 a 4, la probabilità di estrarre 5 rosse in blocco cresce al crescere del numero totale di palline nell'urna e tende quando il numero di palline tende a infinito al caso con reinserimento, modellizzato dalla distribuzione binomiale, che ha probabilità $\binom{5}{5}(0.2)^5 \cdot (0.8)^0 = (0.2)^5 = 0.00032$. Si ricorda infatti che se il numero totale di palline è grande rispetto al numero di estratte, la distribuzione ipergeometrica si approssima infatti bene con una binomiale.