Foglio di esercizi 4 - 12 Aprile 2019
Probabilità e statistica – Ingegneria Meccanica
Alessandro Ciallella

Esercizio 1. Un punto viene scelto a caso uniformemente nel cerchio di raggio 3 centrato nell'origine. Dette (X, Y) le coordinate del punto, scrivere la densità congiunta di X e Y e calcolare le densità marginali. X e Y sono indipendenti? Qual è la probabilità p_1 che il punto disti dall'origine per più di r con $0 < r < 3$? Qual è in media la distanza del punto dall'origine?

Soluzione.

Detta $B_3(0) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 3^2\}$, la densità congiunta di (X, Y) è data da

$$f(x,y) = \begin{cases} c & (x,y) \in B_3(0) \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Per calcolare c si impone che l'integrale della densità su $\mathbb{R}^2$ sia pari a 1, per cui

$$1 = c \int\int_{B_3(0)} 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = c \cdot \mathrm{mis}(B_3(0)) = c\pi 3^2,$$

dove si è indicato con $\mathrm{mis}(B_3(0))$ l'area di $B_3(0)$. Quindi $c = \frac{1}{9\pi}$.

La densità marginale di X è data da $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, \mathrm{d}y$, per cui per $x \in [-3, 3]$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \, \mathrm{d}y = c \int_{-\sqrt{3^2-x^2}}^{\sqrt{3^2-x^2}} 1 \, \mathrm{d}y = \frac{2\sqrt{9-x^2}}{9\pi}$$

mentre $f_X(x) = 0$ fuori dall'intervallo $[-3, 3]$. Analogamente, la densità marginale di Y sarà per simmetria della stessa forma, cioè

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2\sqrt{9-y^2} & y \in [-3,3] \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

X ed Y non sono indipendenti, infatti $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$.

La probabilità $p_1(r)$, al variare di r in $[0, 3]$, si trova integrando nell'area tale che $X^2 + Y^2 \geq r^2$ la $f(x, y)$, per cui, scrivendo in coordinate polari

$$p_1(r) = \int_r^3 \int_0^{2\pi} c\rho \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\rho = \frac{1}{9\cancel{\pi}} 2\cancel{\pi} \int_r^3 \rho \, \mathrm{d}\rho = \frac{1}{9}(9 - r^2)$$

cioè $p_1(r)$ è data dal rapporto tra l'area della corona circolare di raggi compresi tra r e 3, e l'area del cerchio $B_3(0)$.

Chiamando D la v.a. che indica la distanza del punto (X,Y) dall'origine, ricaviamo da $p_1(r)$ la funzione di ripartizione di D:

$$F_D(r) = P(D \leq r) = 1 - P(D > r) = 1 - p_1(r) = \frac{r^2}{9}\,, \quad \textit{per } r \in [0,3]$$

mentre $F_D(r) = 0$ per $r < 0$ ed $F_D(r) = 1$ per $r > 3$. La densità di D si ricava derivando la funzione di ripartizione:

$$f_D(r) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} F_D(r) = \begin{cases} \frac{2}{9}r & \textit{se } r \in [0,3] \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

La distanza media del punto dall'origine è allora il valor medio di D

$$\mathbb{E}(D) = \int_0^3 r \cdot \frac{2}{9} r \,\mathrm{d}r = \frac{2}{9}\frac{r^3}{3}\bigg|_0^3 = 2.$$

Esercizio 2. Sia (X,Y) un vettore aleatorio con densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y}\mathrm{e}^{-(\frac{x}{y}+y)}, & x > 0\,,\ y > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare la densità marginale di Y , il valore atteso di Y, la densità di X condizionato a $Y = y$ (per $y > 0$).

Soluzione.

La densità marginale di Y è data da

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1}{y}\mathrm{e}^{-(\frac{x}{y}+y)}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-(\frac{x}{y}+y)}\bigg|_{x=0}^\infty = \mathrm{e}^{-y}, \quad \textit{se } y > 0,$$

mentre $f_Y(y) = 0$ se $y \leq 0$.

Y è allora una v.a. esponenziale di parametro 1, da cui $\mathbb{E}(Y) = 1$.

La densità di X condizionata a $Y = y$ per $y > 0$ è data da

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{y}\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}\cancel{-y}}}{\cancel{\mathrm{e}^{-y}}} = \frac{1}{y}\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}} & \textit{se } x > 0 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Esercizio 3. Sia (X,Y) un vettore aleatorio con densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} kx^2y, & (x,y) \in T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

essendo T il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,2)$, $(1,0)$. Determinare la costante k e le densità marginali di X e di Y. X ed Y sono indipendenti? Perché?

Soluzione.

Imponendo ad $f(x,y)$ di essere una densità di probabilità, cioè richiedendo che l'integrale di $f(x,y)$ su $\mathbb{R}^2$ sia pari ad 1, si trova

$$1 = k\int_0^1 \int_0^{2x} x^2 y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = k\int_0^1 x^2 \left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^{2x} \right) \mathrm{d}x = 2k\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x = \frac{2k}{5}$$

si deduce che $k = \frac{5}{2}$.

La densità marginale $f_X(x)$ di X è chiaramente pari a 0 se $x \notin [0,1]$, mentre

$$f_X(x) = \frac{5}{2}\int_0^{2x} x^2 y\,\mathrm{d}y = \frac{5}{2}x^2 \left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^{2x} \right) = 5x^4, \quad \textit{se } x \in [0,1].$$

La densità marginale $f_Y(y)$ di Y è nulla se $x \notin [0,2]$ e vale

$$f_Y(y) = \frac{5}{2}\int_{y/2}^1 yx^2\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}y\left(\frac{x^3}{3}\Big|_{x=\frac{y}{2}}^1 \right) = \frac{5}{6}y(1-\frac{y^3}{8}) \quad \textit{se } y \in [0,2].$$

X ed Y non sono indipendenti, come si vede dal fatto che $f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$. In effetti, detta $I_T(x,y)$ la funzione indicatrice di essere nel triangolo T definita come $I_T(x,y) = \begin{cases} 1 & \textit{se } (x,y) \in T \\ 0 & \textit{altrimenti}, \end{cases}$ si poteva osservare che $f(x,y)$ si può scrivere $f(x,y) = kx^2yI_T(x,y)$, per $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, e non si può fattorizzare nel prodotto di una funzione della sola x per una della sola y, per cui X ed Y sono dipendenti. Infatti, conoscere il valore assunto da una delle due dà informazione già sull'intervallo dei valori che può assumere l'altra.

Esercizio 4. Un uomo di 50 anni deve ricevere un rimborso da un ente pubblico. Il tempo T (espresso in anni) di disbrigo delle innumerevoli pratiche burocratiche ha distribuzione esponenziale con valore medio pari a 15. La durata X della vita dell'uomo (espressa in anni) ha la seguente distribuzione:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda_x \mathrm{e}^{-\lambda_x(x-50)} & \textit{per} \quad x > 50 \\ 0 & \textit{per} \quad x \leq 50 \end{cases}$$

dove λ_x è pari a $\frac{1}{20}$.

Calcolare la probabilità γ che l'uomo muoia senza rivedere i propri soldi.

(N.B. si supponga che X e T siano indipendenti).

Soluzione.
Detta $f_T(t)$ la densità di T, vista l'indipendenza di X e T la densità congiunta di X e T è

$$f(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{20}\mathrm{e}^{-\frac{x-50}{20}} \cdot \frac{1}{15}\mathrm{e}^{-(\frac{t}{15})} & x > 50,\, t > 0 \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

L'uomo muore senza ricevere il suo rimborso se gli anni che vive ancora (cioè $X-50$) sono inferiori al tempo T necessario a ricevere il denaro. Quindi

$$\begin{aligned}
\gamma = P(X-50 < T) &= \int_0^\infty \int_{50}^{t+50} f_X(x) f_T(t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty f_T(t) \int_{50}^{t+50} \frac{1}{20}\mathrm{e}^{-\frac{(x-50)}{20}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
\underset{\mathrm{d}u=\,\mathrm{d}x}{\overset{u=x-50}{=}} &\int_0^\infty f_T(t) \int_0^t \frac{1}{20}\mathrm{e}^{-\frac{u}{20}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t = \frac{1}{15}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{t}{15}}\left(-\mathrm{e}^{-\frac{u}{20}}\Big|_0^t \right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{15}\int_0^\infty -\mathrm{e}^{-\frac{4t+3t}{60}} + \mathrm{e}^{-\frac{t}{15}}\,\mathrm{d}t = \frac{\cancel{60}^{4}}{7\cdot\cancel{15}}\mathrm{e}^{-\frac{7t}{60}}\Big|_0^\infty - \mathrm{e}^{-\frac{t}{15}}\Big|_0^\infty = -\frac{4}{7}+1 = \frac{3}{7}.
\end{aligned}$$

Esercizio 5. Sia (X,Y) un vettore aleatorio con densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} 6\mathrm{e}^{-(2x+3y)}, & x \geq 0,\, y \geq 0, \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Stabilire se X ed Y sono indipendenti. Calcolare il valore atteso $\mathbb{E}(Y)$ di Y e la densità di probabilità di $Z = \frac{X}{Y}$.

Soluzione.
Detta $I_{[0,\infty)}(t)$ la funzione indicatrice di essere nella semiretta positiva ($I_{[0,\infty)}(t) = 1$ se $t \geq 0$ ed $I_{[0,\infty)}(t) = 0$ se invece $t < 0$), si osserva che la densità congiunta si può scrivere come prodotto di una funzione della sola x per una della sola y, per $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = 2\mathrm{e}^{-2x} I_{[0,\infty)}(x) \cdot 3\mathrm{e}^{-3y} I_{[0,\infty)}(y), \quad x \in \mathbb{R}\ ,\ y \in \mathbb{R}$$

Quindi X ed Y sono indipendenti. In effetti le due funzioni moltiplicate nella scrittura precedente sono le densità marginali di X ed Y rispettivamente, da cui si vede che Y ha distribuzione esponenziale di parametro 3. Il valore atteso di Y è quindi $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{3}$.

Per calcolare la densità di Z, ricaviamo la sua funzione di ripartizione. Osserviamo che $Z \geq 0$ perché sia X che Y sono non negative, e che per $z \geq 0$

$$Z \leq z \Leftrightarrow \frac{X}{Y} \leq z \Leftrightarrow zY \geq X$$

troviamo allora la funzione di ripartizione di Z:

$$F_Z(z) = P(zY \geq X) = \int_0^\infty \int_0^{zy} 2\mathrm{e}^{-2x} 3\mathrm{e}^{-3y} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^\infty 3\mathrm{e}^{-3y} \left[-\mathrm{e}^{-2x} \Big|_{x=0}^{zy} \right] \mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^\infty -3\mathrm{e}^{-(3+2z)y} + 3\mathrm{e}^{-3y} \,\mathrm{d}y = \left(\frac{3}{3+2z} \mathrm{e}^{-(3+2z)y} \Big|_{y=0}^\infty \right) - \left(\mathrm{e}^{-3y} \Big|_0^\infty \right) =$$
$$= -\frac{3}{3+2z} + 1 = \frac{-3+3+2z}{3+2z} = \frac{2z}{3+2z}$$

per $z \geq 0$, mentre $P(Z < 0) = 0$, per cui $F_Z(z) = 0$ per $z < 0$.
Si osservi che quella trovata è effettivamente la funzione di ripartizione di una v.a. continua non negativa, infatti $\lim_{z \to 0^+} F_Z(z) = 0$ e $\lim_{z \to \infty} F_Z(z) = 1$ ed inoltre F_Z non decrescente, infatti la sua derivata è la densità ed è ≥ 0:

$$f_Z(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} F_Z(z) = \frac{2(2z+3) - 4z}{(2z+3)^2} = \frac{6}{(2z+3)^2}, \quad \textit{se } z \geq 0,$$
$$f_Z(z) = 0, \quad \textit{se } z < 0.$$